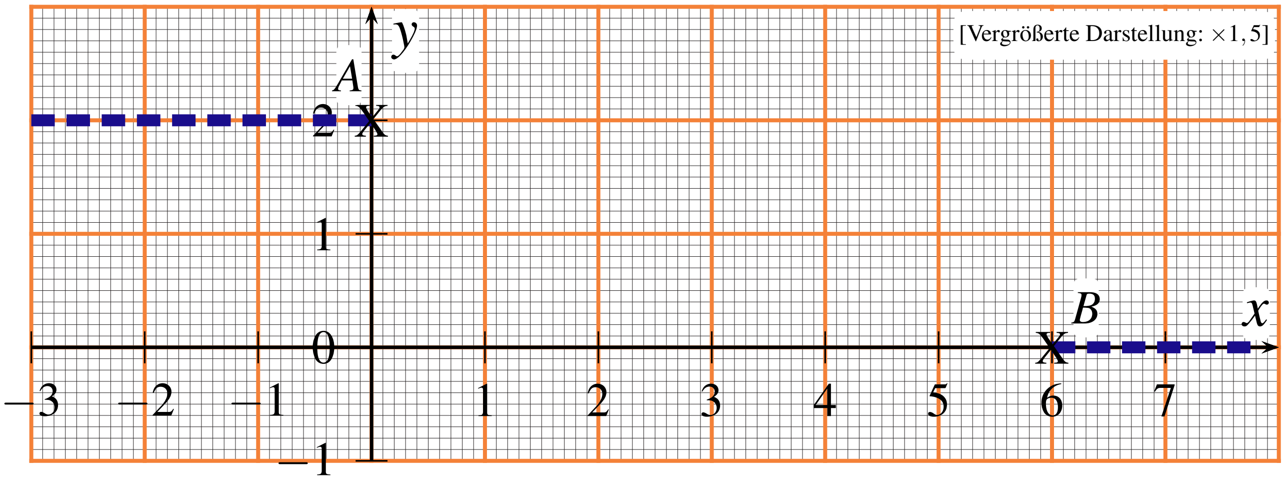
Mathematik

Analysis – Steckbriefaufgabe **[Prüfung]**

In einem öffentlichen Park soll zu dessen Beliebtheits-Steigerung bei Jugendlichen eine Skateboard-Rampe errichtet werden. Diese soll 2 m hoch und 6 m lang sein. Die Bahnkurve soll einem Polynom 3. Grades gleichen, das für $x \in [0;6]$ definiert ist und an den Endpunkten $A(0|2)$ und $B(6|0)$ jeweils in eine waagerechte Gerade übergeht. Dies verdeutlicht auch das unten abgebildete Koordinatensystem, in dem allerdings das Polynom noch fehlt, das die Punkte A und B und somit die beiden gestrichelt gezeichneten Geraden knickfrei verbinden soll.



a) Bestimme die Funktionsgleichung des gesuchten Polynoms 3. Grades $f(x)$.

Benutze im Folgenden die Funktion $f(x) = \frac{1}{54} \cdot x^3 - \frac{1}{6} \cdot x^2 + 2$.

b) Bestimme die Koordinaten des Wendepunktes der Funktion und zeichne den Wendepunkt in das obige Koordinatensystem ein.

c) Skizziere die Funktion im obigen Koordinatensystem.

d*) Bestimme die Stammfunktion von $f(x)$ und berechne das Volumen der überwiegend hohlen und 3 m breiten Skateboard-Rampe im x-Intervall $[0;6]$.

☺ *Viel Erfolg - Du schaffst das !* ☺

*) Dieser Aufgabenteil ist erst nach Einführung der Integralrechnung zu beweltigen ... wird also noch vertagt.

Prüfer: JMB　　　Schule: XXX (XX), XX

Püfling: *GK-Teilnehmer C* [#?]

Abiturprüfung 20XX

Angaben über Halbjahre, Anforderungsbereiche, Gewichtung

2. Prüfungsteil (zusammenhängende Darstellung)

Erwartete Prüfungsleistung (konkrete Fachinhalte)

Q2.1 I – III 10%

a) Ansatz: $f(x)=d\cdot x^3+c\cdot x^2+b\cdot x+a$; $a,b,c,d\in\mathbb{R}$; $d\neq 0$.

Bedingungen: ① $f(0)=2$; ② $f'(0)=0$; ③ $f(6)=0$; ④ $f'(6)=0$.

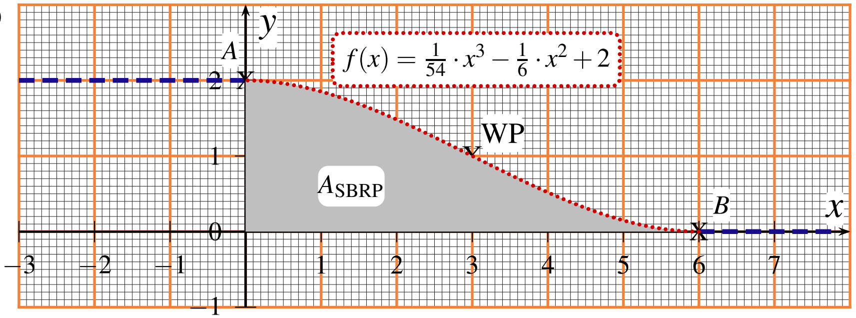
$f(0)=a\overset{①}{=}2$ ❶; $f'(0)=b\overset{②}{=}0$ ❷; ⑤ $c\overset{④}{=}-9\cdot d$; $d\overset{④+⑤}{=}\frac{1}{54}$ ❸;

$c\overset{⑤+❸}{=}-\frac{1}{6}$ ❹ $\Rightarrow$ $f(x)=\frac{1}{54}\cdot x^3-\frac{1}{6}\cdot x^2+2$.

Q2.1 I – II 10% [b+c]

b) Der WP liegt genau zwischen HP $=A$ und TP $=B$: WP $(3|1)$.

c)



Q2.2 I – III 10%

d) $F(x)=\frac{1}{216}\cdot x^4-\frac{1}{18}\cdot x^3+2\cdot x+c_{\text{I}}$.

$V_{\text{SBR}}=3\cdot A_{\text{SBRP}}$; $A_{\text{SBRP}}=\left|\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|[F(6)-F(0)]\right|$;

$F(0)=c_{\text{I}}$; $F(6)=6-12+12+c_{\text{I}}=6+c_{\text{I}}$;

$A_{\text{SBRP}}=6\ \text{m}^2$; $V_{\text{SBR}}=3\cdot 6=18\ \text{m}^3$.

[*Probe*: Mit Maßstab 1 cm $\hat{=}$ 1 m sollte somit die Profilfläche 6 große 1 cm²-Kästen umfassen. Wie man sieht, sind es 3 komplette und 6 weitere Kästen, die sich paarweise zu einem ganzen Kasten ergänzen. ✓]

[*Angesichts der geringen Zeit wird vom Prüfling hier lediglich die Beschreibung des Lösungsweges erwartet, nicht die hier zur Vollständigkeit gezeigte Lösung – je nach verbleibender Zeit wird dies entsprechend in der Befragung gesteuert* .]

Notizen zum Prüfungsverlauf

[*Normal wäre hier Platz für Bemerkungen des Protokollanten / Prüfungsleiters. Stattdessen skizziere ich hier ausführlich eine alternative Musterlösung für a), die im gegebenen sehr einfachen Beispiel wenig Sinn macht, bei komplizierterer Rechnung allerdings zu bevorzugen wäre, da der GTR (hier CASIO FX-CG 20; TI-84 unten) dann viel Arbeit abnimmt und somit Zeit spart.*
Wie bekannt lässt der Operator 'bestimme' den Lösungsweg offen, so dass man
1) algebraisch / exakt / 'von Hand' berechnen [ist ein CAS eingeführt, würde er nur beim 3. ausfallen],
2) numerisch = mit TR / GTR berechnen oder,
3) graphisch (was hier natürlich ausfällt) bestimmen dürfte.]

$f(x)=d\cdot x^3+c\cdot x^2+b\cdot x+a$ (allgemeiner Ansatz für Polynom 3. Grades, da ein WP nötig ist)

$f'(x)=3\cdot d\cdot x^2+2\cdot c\cdot x+b$ (1. Ableitung – $f'(x)=0$: XP-Kandidaten, waagerechte Wendetangente)

$f''(x)=6\cdot d\cdot x+2\cdot c$ (2. Ableitung – $f''(x)=0$: WP-Kandidaten, größte absolute Steigung [steil])

Randbedingungen:

i) $f(0)=2\Rightarrow d\cdot 0+c\cdot 0+b\cdot 0+a=2$ [①]

ii) $f(6)=0\Rightarrow d\cdot 6^3+c\cdot 6^2+b\cdot 6+a=0$ [③]

iii) $f'(0)=0\Rightarrow 3\cdot d\cdot 0+2\cdot c\cdot 0+b=0$ [②] $\Rightarrow$ Lineares Gleichungssystem (LGS)

iv) $f'(6)=0\Rightarrow 3\cdot d\cdot 6^2+2\cdot c\cdot 6+b=0$ [④] in Matrix-Schreibweise:

$$\begin{array}{ccccc} d=\mathtt{X} & c=\mathtt{Y} & b=\mathtt{Z} & a=\mathtt{T} & E \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 2\\ 6^3 & 6^2 & 6 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3\cdot 6^2 & 2\cdot 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\texttt{LGS - Solve}]{\text{[GTR]}} \begin{cases} \mathtt{X}=d=\frac{1}{54}\approx 0{,}0185\\ \mathtt{Y}=c=-\frac{1}{6}\approx -0{,}167\\ \mathtt{Z}=b=0\\ \mathtt{T}=a=2 \end{cases}$$

'[`MENU`]' – '[`ALPHA`]+[`X,Θ,T`] {= `A` → Gleichung}' – '[`F1`] (→ Lin. Gleichungssystem)' – '`Anzahl der Unbekannten:`' '[`F3`] (→ '4')' – {*Eingabe der Matrix; inkl.* '`6^3`' *etc.*} – '[`F1`] (→ Solve)' ✌.

Bei alternativem Einsatz des GTR TI-83|84 Plus wäre das Vorgehen:
`MATRX` – `MATH` – `B`; dabei steht '`B`' für `rref` und somit für '`Reduced Row Echelon Form`', d.h. für die Diagonalform einer Matrix; hingegen steht '`A`' für `ref` als '`Row Echelon Form`', d.h. für 'obere Dreiecksform' einer Matrix.
Als kurzes Ausweisen des GTR-Lösungsschrittes wäre somit "`GTR: rref`" geeignet.

1) Notenvergabe (wie in Sek. II üblich): 15 {1+} – 95%, 14 {1} – 90%, 13 {1-} – 85%, 12 {2+} – 80%, 11 {2} – 75%, 10 {2-} – 70%, 9 {3+} – 65%, 8 {3} – 60%, 7 {3-} – 55%, 6 {4+} – 50%, 5 {4} – 45%, 4 {4-} – 40%, 3 {5+} – 33%, 2 {5} – 27%, 1 {5-} – 20%, 0 {6} – < 20%.

2) Auf das 2. Prüfungsthema sollen 25 – 30% entfallen; Anteil von AFB II – III > 50%.