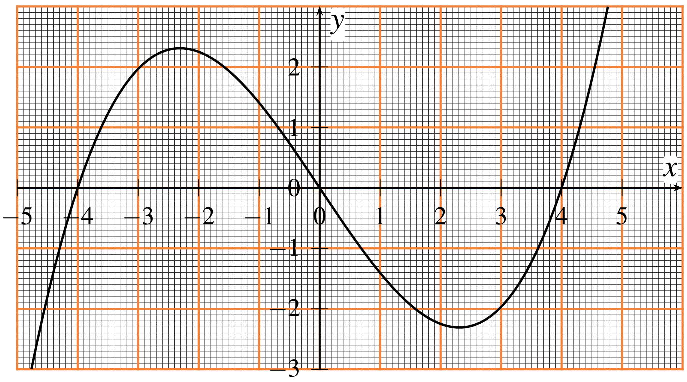


1. Beispiel einer Kurvendiskussion:

I) Benenne die Charakteristika des links abgebildeten Funktionsgraphen, leite 2× graphisch ab, begründe Aussagen über die Funktion $f(x)$ und deren Ableitung(en) und ermittele die Funktionsgleichung aus diesen Feststellungen.

II) Bestimme Stammfunktion $F(x)$ sowie die Fläche zwischen der Funktion $f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[-4;4]$ und erläutere dabei Dein Vorgehen!

2. Beispiel einer Kurvendiskussion:

Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades geht durch den Ursprung und hat im WP $(-2|2)$ eine Wendetangente mit der Steigung -3.

a) Bestimme die Gleichung der Funktion.

Benutze im Folgenden die Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x.$

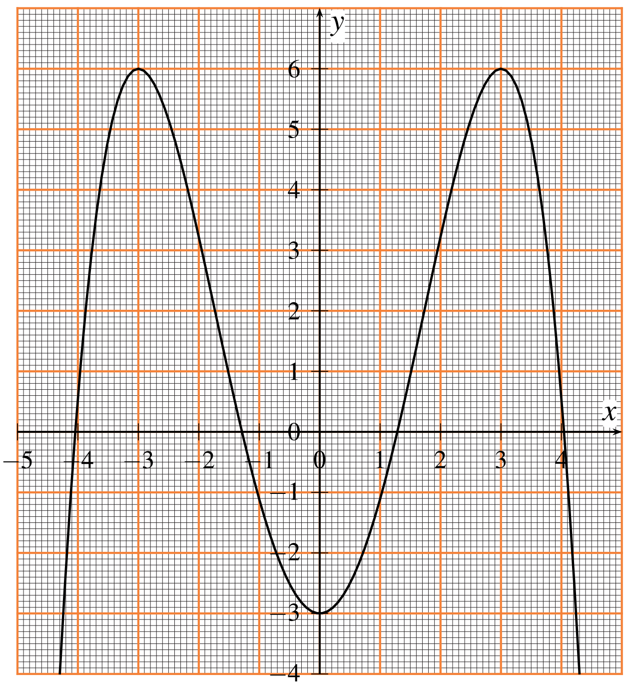
b) Berechne die Koordinaten der Hoch- bzw. Tiefpunkte der Funktion.
(Runde auf eine Dezimale, d.h. auf Zehntel!)

c) Bestimme die Stammfunktion zu der Funktion $f(x)$.

Die Nullstellen der Funktion haben die folgenden Koordinaten:
$NS_1\ (-4{,}7\,|\,0)$; $NS_2\ (-1{,}3\,|\,0)$; $NS_3\ (0\,|\,0)$.

d) Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die die Funktion mit der x-Achse einschließt.

3. Beispiel einer Kurvendiskussion:



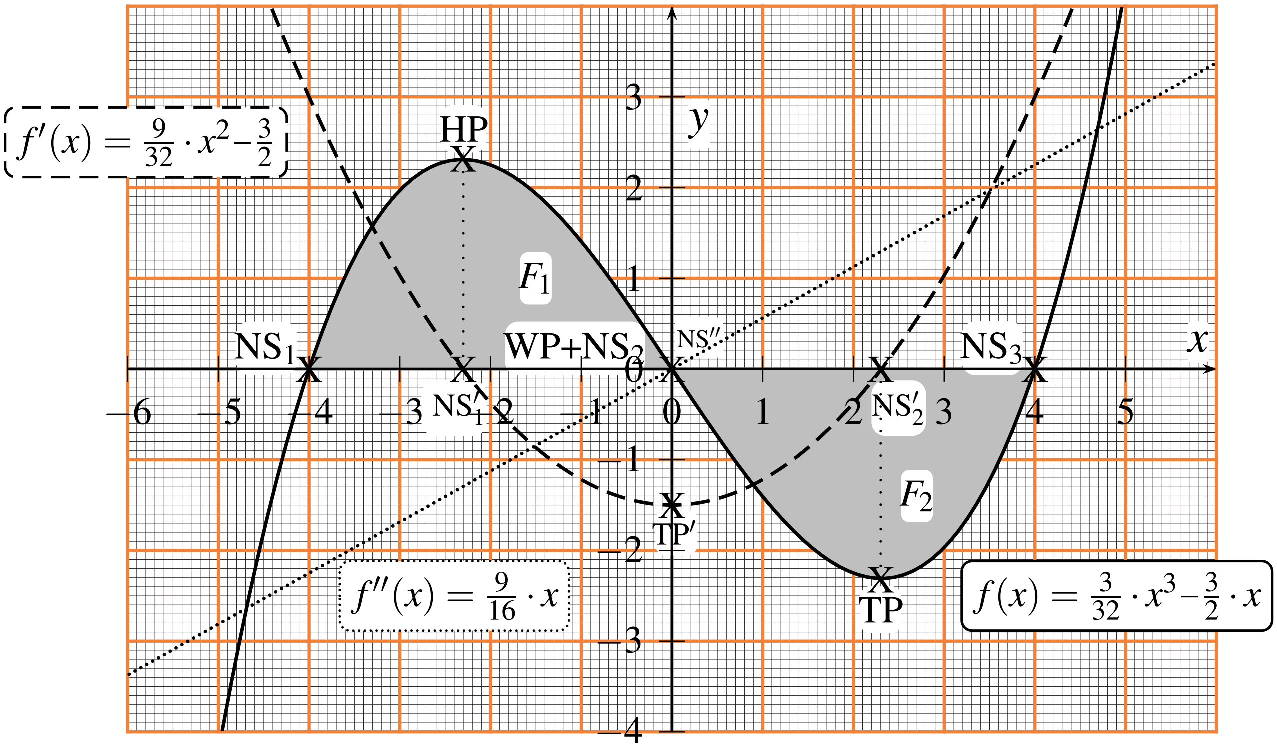
a) Welche Aussagen kannst Du über die Funktion machen, deren Graph nebenstehend zu sehen ist.

b) Erläutere die Auswirkungen Deiner Feststellungen auf das Aussehen der Funktionsgleichung dieser Funktion.

c) Stelle die Funktionsgleichung möglichst exakt auf.
(Tipp: Bedingungen aufstellen; Matrix eingeben; [2nd][x^{-1}] {=MATRX} - MATH - ‘B: rref’ zum Lösen)

d) Stelle die Stammfunktion zur in c) gefundenen Funktion auf und erläutere Dein Vorgehen bei der Flächenbestimmung.

Lösung des 1. Kurvendiskussions-Problems:



Zu I): Charakteristika des Graphen, graphisch bestimmte 1. und 2. Ableitung, Folgerungen bzgl. des Funktionsterms sowie Erstellen der Funktionsgleichung:

Punktsymmetrie zum Ursprung – d.h. nur ungeradzahlige Potenzen: $\lim_{x\to-\infty} f(x) \to -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) \to +\infty \;\Rightarrow\; a_n > 0$.
$3\times$ NS $\Rightarrow$ Linearfaktorzerlegung: einfachster Fall: $f(x) = \big((x+4)\cdot(x-4)\cdot x\big)\cdot s = s\cdot x^3 - 16\cdot s\cdot x$ mit $s = a_n > 0$,
mindestens ganzrationale Funktion 3. Grades {d.h. kubisch $[d\cdot x^3 + c\cdot x^2 + b\cdot x + a;\; a = c = 0]$ oder *höherer* Grad},
$1\times$HP & $1\times$TP $\Rightarrow$ $1\times$ WP; WP $= (0|0)$ wegen P.-Symmetrie zum Ursprung; $\text{WP}_{\text{R}\to\text{L}} \Rightarrow f'''(x_{\text{WP}}) > 0$, $\mathbb{D} = \mathbb{W} = \mathbb{R}$ wegen Grenzwertbetrachtung.

Graphische Ableitung wird gezeichnet: $f'(x)$ hat NSs (NS$'$) bei XPs von $f(x)$ (HP+TP), ebenso XP (TP$'$, da zuvor Steigung monoton fällt und danach steigt) bei WP von $f(x)$ (WP+NS$_2$). Da $f'(x)$ vom 2. Grad sein muss (Ableiten reduziert Exponenten von x um einen Grad), kann nun von Hand eine nach oben geöffnete Parabel durch die 3 Punkte gezeichnet werden.

$f''(x)$ hat NS (NS$''$) bei XP von $f'(x)$ (TP$'$) und ist eine Gerade (d.h. vom Grad 1).
Siehe gestrichelte ($f'(x)$) und gepunktete ($f''(x)$) Graphen in obiger Abbildung.

Zu II): Integral zur Flächenberechnung im Intervall $[-4;4]$:

1) $[-4;4] \subset \mathbb{D}$, $f(x)$ und $F(x)$ existieren im Intervall und sind dort stetig;
2) Eine Fläche ist immer positiv – das Integral hat aber ein Vorzeichen:
'$-$' für eine Fläche unterhalb der x-Achse (hier F_2), '$+$' darüber (hier F_1). Daher muss man auf dem Intervall bei den Nullstellen auch die Integrale aufteilen und anschließend deren Beträge zur Gesamtfläche (hier F, oben grau eingezeichnet) addieren – wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung kann man eine der beiden Flächen hier auch verdoppeln:

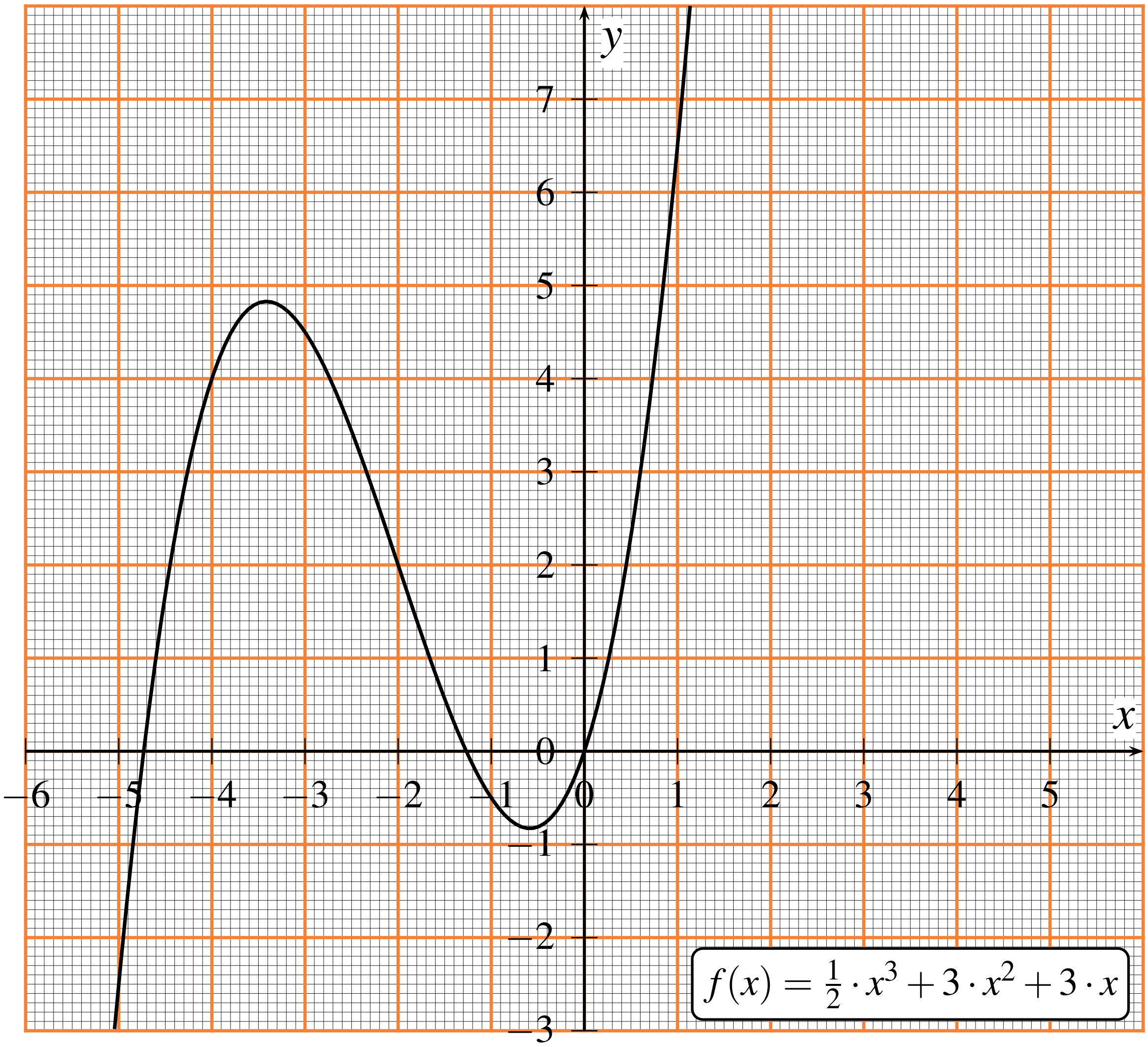
$$F = F_1 + F_2 = \left|\int_{-4}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = 2\cdot\left|\int_{-4}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = 2\cdot\left|\int_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = 2\cdot\left|\,[F(x)]_0^4\,\right|.$$

Stammfunktion: $F(x) = \frac{3}{128}\cdot x^4 - \frac{3}{4}\cdot x^2 + c$; $F(0) = c$, $F(4) = -6 + c$; $F = 2\cdot|F(4) - F(0)| = 12$.

[Das Ergebnis gilt in Standard-Flächeneinheiten, je nach Maßstab. Auf richtigem mm-Papier wäre es 'cm^2', oben aber vergrößert dargestellt.]

Berechnung mit GTR (oberste Zeile für Analysis): [y=] ➡ Umrandungsfunktion eingeben; [2nd]+[Trace] {=Calc}: '7: $\int f(x)\mathrm{d}x$'.
Ebenso interessant: In 'Calc' kann man auch Nullstellen über graphische Einschränkung numerisch bestimmen lassen [Vorsicht: nicht exakt!] – und über Veränderung von $f(x)$ somit auch x-Werte für bestimmte y-Werte (durch Abänderung von a_0). 'Trace' gibt grobe Einblicke über den Verlauf im Ausschnitt, der mit 'Window' gut einzustellen ist [Vorsicht: Fingerspitzengefühl bzw. Schätzen wichtig/nötig!].

Lösung des 2. Kurvendiskussions-Problems:



Kleine Tabelle zur Ableitung bzw. zur Integration

Sei $f(x)$ eine **differenzierbare und integrierbare ganzrationale Funktion** auf $\mathbb{R}$ vom Grad n,
$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f(x)$ die erste Ableitung der Funktion und
$F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ (zur Vereinfachung die mit verschwindendem konstanten Glied: die Menge der Stammfunktionen unterscheidet sich ja lediglich in der Integrationskonstante, die nur über die Randbedingungen zu bestimmen ist und nicht aus der Ableitung $f(x) = F'(x)$ geschlossen werden kann).

Funktion:	$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
Grad:	$n-1$	n	$n+1$
# NSs:	$\leq n-1$	$\leq n$	$\leq n+1$
# XPs:	$\leq n-2$	$\leq n-1$	$\leq n$
# WPs:	$\leq n-3$	$\leq n-2$	$\leq n-1$

Funktion:	$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
	WP	?	?	?
	XP	WP	?	?
	NS	XP	WP	?
	?	NS	XP	WP
	?	?	NS	XP
	?	?	?	NS

Wie man sieht: **Ableiten glättet** – **Integrieren raut auf**.
Dies gilt aber **lediglich für ganzrationale Funktionen**,
nicht für e-Funktionen oder trigonometrische Funktionen.