Name: ______________

____

Mathematik

Note: ______________

Teil 1: Ohne Hilfsmittel (d.h. ohne GTR & ohne Formelsammlung) !

a) Berechne die folgenden Aufgaben:

i) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3+3\cdot 0 & 2\cdot 0+3\cdot 3 \\ -1\cdot 3+0\cdot 0 & -1\cdot 0+0\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ [oder über Falk-Schema, ➲ LB, S. 157, grauer 'Wekzeug'-Kasten];

(2 Punkte)

ii) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 3-0 \\ -1-(-2) & 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ [➲ LB, S. 154, Nr. 11 & kl.B., S. 15];

(2 Punkte)

iii) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 3+3\cdot 0+(-1)\cdot 1 \\ 2\cdot 3+0\cdot 0+2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ ['$(2\times 3)\cdot(3\times 1) = (2\times 1)$', ➲ LB, S. 156+197 & FS, S. 70 {R.m.M.}];

(2 Punkte)

b) Bestimme:

i) die inverse Matrix A^{-1}:

$$\begin{array}{ccc} A & & E \\ \parallel & & \parallel \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow \quad -1\cdot '2.' \quad \rightarrow \\ \leftarrow \frac{1}{3}\cdot '1.' + \frac{2}{3}\cdot '2.' \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ \parallel & & \parallel \\ E & & A^{-1} \end{array}$$

[➲ LB, S. 162+197 Kasten & kl.B., S. 28f] (3 Punkte)

ii) die Determinante von B:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot 0\cdot 0 = -4-1 = -5$$

[oder 'Jägerzaun'-Methode: ersten beiden Spalten rechts neben Determinante schreiben, 3 Produkte der vollen (3 Elemente) Hauptdiagonalen (links oben nach rechts unten) addieren und davon die 3 Produkte der vollen Nebendiagonalen (rechts oben nach links unten) abziehen; ➲ LB, S. 162 & FS, S. 70 {Ber. von Determinanten}, sowie Wikipedia, URL: `http://de.wikipedia.org/wiki/Regel_von_Sarrus`]

(2 Punkte)

Gebe an, was Du für B direkt aus diesem Ergebnis schließen kannst.

Da die Determinante der Matrix B ungleich 0 ist [$\det(B) \neq 0$], existiert die Inverse zu B, d.h. B^{-1}, für die gilt: $B\cdot B^{-1} = B^{-1}\cdot B = E$.

(1 Punkt)

Bitte Blatt umdrehen!

Teil 2: Einsame Insel [nach Nachschreiber-Abitur 2013: LK/Lineare Algebra]

Auf einer einsamen Insel leben zwei bisher unbekannte Tierarten: eine Insektenart und eine Säugetierart. Zum Zeitpunkt $t = 0$ landet ein Forscherteam auf der Insel und beginnt mit der Untersuchung der beiden Tierpopulationen. Im Folgenden werden nur weibliche Tiere betrachtet.

a) Das Leben der Insekten kann grob in die Abschnitte Ei, Larve und Käfer eingeteilt werden. Jedes dieser drei Stadien dauert etwa zwei Monate.

Die zeitliche Entwicklung der Insektenart von einer zur nächsten Generation wird durch die Matrix

$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben. Die Multiplikation von I mit dem Populationsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} e \\ l \\ k \end{pmatrix}$

ergibt die Aufteilung der Population zwei Monate später, wobei e, l und k für die jeweilige Anzahl der weiblichen Tiere in den drei Stadien Ei, Larve und Käfer stehen.

$$\text{Geg.:}\quad I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \end{pmatrix};\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} e \\ l \\ k \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Ei} \\ \leftarrow \text{Larve} \\ \leftarrow \text{Käfer} \end{array};\quad 1 \text{ Generation} = 2 \text{ Monate} = \tfrac{1}{6}\text{ a.}$$

i) Erläutere die Bedeutung der Matrixeinträge $0{,}5$ und $2{,}5$ im Sachzusammenhang.
'$0{,}5$' bedeutet, dass in einer Generation die Hälfte aller Eier zu Larven werden (bzw. dass aus 50% der Eier innerhalb von 2 Monaten Larven schlüpfen); '$2{,}5$' bedeutet, dass in einer Generation im Mittel pro (weiblichem – die anderen werden hier ja nicht erfasst) Käfer $2\frac{1}{2}$ Eier entstehen (bzw. dass innerhalb von 2 Monaten jeder Käfer im Schnitt 2,5 Eier legt).

(2 Punkte)

ii) Nach zwei Monaten gibt es auf der Insel auf jedem Quadratkilometer 250 Eier, 1000 Larven und 400 Käfer. Berechne $\vec{v_0}$ und damit, wie sich die Insektenpopulation auf einem Quadratkilometer beim Eintreffen des Forscherteams auf die einzelnen Stadien verteilt hat.

$$\text{Geg.: } \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 250 \\ 1000 \\ 400 \end{pmatrix};\quad \text{ges.: } \vec{v_0};\quad \vec{v_1} = I \cdot \vec{v_0} \overset{\det(I)\neq 0}{\iff} I^{-1}\cdot\vec{v_1} = I^{-1}\cdot I\cdot\vec{v_0} = E\cdot\vec{v_0} = \vec{v_0}.$$

$$I^{-1} \overset{\text{GTR}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}25 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \end{pmatrix};\quad \vec{v_0} = I^{-1}\cdot\vec{v_1} \overset{\text{GTR}}{=} \begin{pmatrix} 2000 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix}$$

(2 Punkte)

[Alternativ: $0{,}5\cdot e = 1000 \Leftrightarrow e = 2000$, $0{,}8\cdot l = 400 \Leftrightarrow l = 500$ und $2{,}5\cdot k = 250 \Leftrightarrow k = 100$.]

iii) Ein junger Forscher behauptet, dass sich die Insektenpopulation zyklisch entwickelt. Berechne $\vec{v_2}$ sowie $\vec{v_3}$ und gebe an, warum er Recht hat.

$$\vec{v_2} = I\cdot\vec{v_1} \overset{\text{GTR}}{=} \begin{pmatrix} 1000 \\ 125 \\ 800 \end{pmatrix};\quad \vec{v_3} = I\cdot\vec{v_2} \overset{\text{GTR}}{=} \begin{pmatrix} 2000 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix} \overset{\text{ii)}}{=} \vec{v_0}.$$

Der Forscher hat Recht, da nach dreimaligem Anwenden von I wieder derselbe Verteilungsvektor heraus kommt (d.h. $I^3 = E$), somit ist der Prozess zyklisch periodisch (mit einer Zyklusdauer: $3\cdot\frac{1}{6}\text{ a} = \frac{1}{2}\text{ a}$).
[➲ LB, S. 180, gelbe Kästen, und S. 198, Kasten & kl.B., S. 128 – 134, sowie 'Kür' am Ende von Teil 2) a)]

(2 Punkte)

iv) Erläutere ohne weitere Rechnung, wie viele Eier, Larven und Käfer das Forscherteam auf einem Quadratkilometer $2\frac{2}{3}$ Jahre nach Ankunft der Forscher auf der Insel zählen wird, wenn sich die Lebensbedingungen nicht verändern.

$2\frac{2}{3}$ a $= 32$ Monate $= 16$ Generationen $= 5\frac{1}{3}$ Zyklen $= 5$ Zyklen $+1$ Generation – als Formel geschrieben:

$$\vec{v_{16}} = I^{16}\cdot\vec{v_0} = I^{15}\cdot I\cdot\vec{v_0} = \Big(\underbrace{I^3}_{=E}\Big)^5\cdot I\cdot\vec{v_0} = I\cdot\vec{v_0} = \vec{v_1}.$$

Die Verteilung nach $2\frac{2}{3}$ Jahren entspricht der in ii) vorgegebenen Verteilung, die $\frac{1}{3}$ Zyklus $= 1$ Generation nach Ankunft bestand: 250 Eier, 1000 Larven und 400 Käfer.

(1 Punkt)

Nach einiger Zeit beginnen die Säugetiere damit, sich von den Insekteneiern zu ernähren. Dadurch sinkt der Anteil an Eiern, aus denen Larven schlüpfen, auf 30%.

v) Gebe die Matrix V an, mit der sich die verschlechterte zeitliche Entwicklung beschreiben lässt.

$V \overset{\text{i)}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2,5 \\ 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}$ [Beachte: 'auf 30%' bedeutet $V_{21} =$ '0,3'; 'um 30%' hingegen wäre $0,3 \cdot 0,5 =$ '0,15'!].

(1 Punkt)

vi) Berechne V^3 und interpretiere diese Matrix im Sachzusammenhang.

$$V^3 \overset{\text{GTR}}{=} \begin{pmatrix} 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 \end{pmatrix} = 0,6 \cdot E.$$

(1 Punkt)

Trotz der Veränderung der Lebensbedingungen der Käfer durch die Verhaltensänderung der Säugetiere ist der Prozess noch zyklisch, allerdings bleibt der Bestand nicht erhalten, sondern schrumpft pro Zyklus (d.h. alle 3 Generationen = 6 Monate) mit dem Faktor $0,6$ (d.h. auf 60% des Vorwertes bzw. um 40%).

(1 Punkt)

Kür: Insbesondere beim Abitur sind klare Antworten, die unabhängig von (zumeist unbewiesenen) Aussagen aus dem Vorunterricht sind, zu bevorzugen. Bei 2) a) iii) und vi) könnte man natürlich darauf verweisen, dass jede Matrix zyklisch (alle 3 Generationen; ➲ LB, S. 181, Rand) ist, die vom Typ:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \text{ ist, da: } Z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \cdot c & 0 \\ 0 & 0 & b \cdot a \\ c \cdot b & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Z^3 = Z^2 \cdot Z = \begin{pmatrix} 0 & a \cdot c & 0 \\ 0 & 0 & b \cdot a \\ c \cdot b & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot c \cdot b & 0 & 0 \\ 0 & b \cdot a \cdot c & 0 \\ 0 & 0 & c \cdot b \cdot a \end{pmatrix}$$
$$= a \cdot b \cdot c \cdot E = \det(Z) \cdot E.$$

Somit gibt die Determinante einer solchen Übergangsmatrix an, ob im Zyklus alle 3 Generationen die Population gleich bleibt ($\det(Z) = 1$; auch 'zyklisch periodisch' genannt), wächst ($\det(Z) > 1$) oder schrumpft ($\det(Z) < 1$).
Diese allgemeingültige und nun auch bewiesene Aussage hätten wir auch in a) iii) und a) vi) verwenden können – durch die Aufgabenstellung wurde zwar eine Hilfe gegeben, aber gleichzeitig auch dieser 'elegante' Lösungsweg versperrt.
Man kann also allenfalls zusätzlich darauf hinweisen, dass mit I vom Typ Z und $\det(I) = 1$ der Prozess zyklisch periodisch (alle 3 Generationen) ist sowie dass mit V vom Typ Z und $\det(V) = 0,6$ der Prozess zyklisch schrumpfend (alle 3 Generationen, jeweils auf 60% des Wertes der vorigen Population) ist.

b) Die auf der Insel beheimateten Säugetiere sind nach der Geburt ein Jahr lang unreif und leben dann ein weiteres Jahr als Jungtiere in der Herde, bis sie ausgewachsen sind.

Die zeitliche Entwicklung der Säugetierart von einer zur nächsten Generation wird durch die Matrix $S = \begin{pmatrix} 0 & 1,6 & 2 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,5 \end{pmatrix}$ beschrieben. Die Multiplikation von S mit dem Populationsvektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} u \\ j \\ a \end{pmatrix}$ ergibt die Aufteilung der Population ein Jahr später, wobei u, j und a für die jeweilige Anzahl der weiblichen Tiere im unreifen, jungen und ausgewachsenen Stadium stehen.

i) Erläutere die Bedeutung der Matrixeinträge $0,7$; $0,5$; $0,4$; $1,6$ und 2 im Sachzusammenhang.

70% der Jungtiere erreichen das ausgewachsene Stadium ('0,7'), wobei nur 50% der zuvor ausgewachsenen Tiere auch in der nächsten Generation noch lebendig sind ('0,5'). '0,4': 40% der zuvor unreifen Säugetiere erreichen das Jungtier-Stadium; pro Jungtier gibt es im Mittel '1,6' unreife Säugetiere, pro ausgewachsenem Säugetier hingegen '2' unreife Nachkommen in der nächsten Generation. [Bei allen Werten handelt es sich wie üblich um die weiblichen Tiere, die hier ausschließlich berücksichtigt werden.]

(2 Punkte)

ii) Bei der Ankunft des Forscherteams leben noch 150 unreife, 50 junge und 100 ausgewachsene Säugetiere auf der Insel. Berechne, wie sich die Säugetiere nach 10 und nach 11 Jahren absolut und prozentual auf die drei Generationen verteilen.

$\overrightarrow{w_{10}} = S^{10} \cdot \overrightarrow{w_0} \overset{\text{GTR}}{\approx} \begin{pmatrix} 1228,33 \\ 409,46 \\ 409,45 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{w_{11}} = S^{11} \cdot \overrightarrow{w_0} = S \cdot \overrightarrow{w_{10}} \overset{\text{GTR}}{\approx} \begin{pmatrix} 1474,05 \\ 491,33 \\ 491,35 \end{pmatrix}$.

Die entsprechenden relativen Verteilungsvektoren (d.h. absolute Verteilung geteilt durch Gesamtzahl der Gesamtpopulation: $N_{10} \approx 2047,24$, $N_{11} \approx 2456,73$) ergeben sich zu:

$$\overrightarrow{w_{10,\text{r}}} = \frac{1}{N_{10}} \cdot \overrightarrow{w_{10}} \approx \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{w_{11,\text{r}}} = \frac{1}{N_{11}} \cdot \overrightarrow{w_{11}} \approx \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)

iii) Gebe an, um wie viel Prozent die einzelnen Populationen und die Gesamtpopulation vom 10. zum 11. Jahr ansteigen.

$u_{\text{Wachstum: } 10 \to 11} \approx \frac{1474{,}05 - 1228{,}33}{1228{,}33} \approx 0,20004 \approx 20\%$;

$j_{\text{Wachstum: } 10 \to 11} \approx \frac{491{,}33 - 409{,}46}{409{,}46} \approx 0,19995 \approx 20\% \approx a_{\text{Wachstum: } 10 \to 11}$;

Teilpopulationen wachsen identisch, somit auch die Gesamtpopulation (g; direkte Folge des Distributivgesetzes: $g = u + j + a \overset{z \neq 0}{\Longleftrightarrow} z \cdot u + z \cdot j + z \cdot a = z \cdot (u + j + a) = z \cdot g$).

Die Einzelpopulationen wie die Gesamtpopulation steigen um ca. 20% von der 10. zur 11. Generation an.

(1 Punkt)

iv) Interpretiere Deine Ergebnisse, indem Du eine Prognose für die zukünftige Entwicklung der Säugetierpopulation aufstellst. Gehe dabei auf die Populationsgröße und auf die Verteilung der Generationen ein.

Prognose: Bei unveränderlichen Bedingungen werden die Einzel- (u, j, a) wie die Gesamtpopulation (g) um den Faktor 1,2 pro Generation wachsen, da die relativen Populationsverteilungen ($\overrightarrow{w_{10,\text{r}}}$, $\overrightarrow{w_{11,\text{r}}}$, ...) stabil sind. D.h. für Generation $n \geq 10$ gilt: $N_n \approx N_{10} \cdot 1,2^{(n-10)}$ mit $N \in \{u, j, a, g\}$.

(2 Punkte)

Exkurs: Eigenwertproblem

A sei eine $n \times n$-Matrix (d.h. quadratisch). Wenn gilt: $\boxed{A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}}$, so heißt $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von A (es gibt n nicht notwendiger Weise verschiedene) und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \vec{0}$ Eigenvektor von A (ebenfalls n).

Somit gilt (siehe Ableitung der Leontief-Gleichungen): $(\lambda \cdot E - A) \cdot \vec{x} = \vec{0}$, woraus ersichtlich ist, dass $(\lambda \cdot E - A)$ nicht invertierbar ist. Dies bedeutet wiederum: $\det(\lambda \cdot E - A) = 0$, wobei $p(\lambda) = \det(\lambda \cdot E - A)$ das charakteristische Polynom ist, deren Nullstellen die Eigenwerte von A sind.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; $p(\lambda) = \det(\lambda \cdot E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 & -3 \\ 0 & -2 & \lambda - 6 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda-3)\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda-6) - (\lambda-3)\cdot(-2)\cdot(-3) = (\lambda-3)\cdot((\lambda-1)\cdot(\lambda-6)-6) \\ &= (\lambda-3)\cdot\left(\lambda^2+6-6\cdot\lambda-\lambda-6\right) = (\lambda-3)\cdot\left(\lambda^2-7\cdot\lambda\right) = (\lambda-3)\cdot\lambda\cdot(\lambda-7). \end{aligned}$$

Im Beispiel hat die Matrix A die Eigenwerte 0, 3 und 7, da dies die Nullstellen sind [Produkt = 0, mind. 1 Faktor = 0].

Auch über den GTR kann man diese Nullstellen für kompliziertere Funktionen bestimmen:

i) Funktion editieren: "[Y=]", hierbei ist die Variable (bei uns λ genannt) über "[X, T, Θ, n]" einzugeben, Vorzeichen als "[(−)]" und Potenzen über "[^]".

ii) Plotten der Funktion über "[GRAPH]" – ggf. den Zeichenausschnitt mit "[WINDOW]" anpassen (nicht dargestellte Nullstellen können in iii) nicht eingeschränkt und somit auch nicht berechnet werden; bei x^n gibt es maximal n-Nullstellen).

iii) Berechnung über "[CALC]" ≡ "[2nd] – [TRACE]" – "2: zero" {= Nullstellen}, linke Schranke mit Cursor setzen und Enter, ebenso für rechte Schranke, weiteres Enter, dann wird die {numerische – nicht exakt wie bei einem CAS} Lösung angezeigt: "X=... Y=0", d.h. einer der Eigenwerte wäre "...".

Eigenvektoren: $(\lambda \cdot E - A) \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

$$\lambda = 3: \begin{pmatrix} 3-3 & 0 & -2 \\ 0 & 3-1 & -3 \\ 0 & -2 & 3-6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3-3 & 0 & -2 \\ 0 & 3-1 & -3 \\ 0 & -2 & 3-6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot x_3 \\ 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 \\ -2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$\Rightarrow x_3 = 0,\ x_2 = 0,\ x_1$ beliebig, d.h. $\vec{x}_{\lambda=3} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; analog: $\vec{x}_{\lambda=0} = u \cdot \begin{pmatrix} -2/3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_{\lambda=7} = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

jeweils mit $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Das obige LGS kann natürlich auf gewohnte Weise auch per GTR berechnet werden!

[➲ FS, S. 71 {Eigenwerte, Eigenvektoren und Fixpunkte linearer Abbildungen}; vgl. LB, S. 199 Kasten & kl.B., S. 114 {Fixvektor}]

⋆ ⋆ ⋆ Ab hier die Fortsetzung der Abituraufgabe, die nicht in der Klausur enthalten war: ⋆ ⋆ ⋆

Um sich gegen die Eier fressenden Säugetiere zu wehren, entwickeln die Insekten nach einigen Jahren ein extrem wirksames Gift, das vor allem den Nachwuchs der Säugetiere reduziert.

c)⋆ Die veränderte Entwicklung der Säugetierpopulation kann durch eine Matrix mit dem charakteristischen Polynom $p(k) = -k^3 + 0,5 \cdot k^2 + 0,16 \cdot k + 0,064$ beschrieben werden.

- Bestimme mit Hilfe Deines CAS/GTRs die größte positive Lösung der Gleichung $p(k) = 0$.

$k \overset{\text{GTR}}{\underset{\text{CALC: zero}}{=}} 0,8$. Der gesuchte Wert ist somit $0,8$.

- Interpretiere den Wert im Sachzusammenhang.

0,8 ist der dominante Eigenwert zur Matrix und somit der Wachstumsfaktor für die verschlechterte Entwicklung, d.h. die Säugetierpopulation schrumpft nun insgesamt und in jeder Generation jährlich um 20%.

(3 Punkte)

d)⋆ Die Matrix $S_b = \begin{pmatrix} 0 & g & g \\ r & 0 & 0 \\ 0 & w & b \end{pmatrix}$ modelliert die oben beschriebene veränderte Entwicklung der Sägetiere.

- Stelle die Eigenwertgleichung zum Eigenwert $k = 0,8$ mit dem Eigenvektor $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1500 \\ 600 \\ 900 \end{pmatrix}$ auf.

Die Eigenwertgleichung lautet: $S_b \cdot \vec{e} = 0,8 \cdot \vec{e}$.

- Gehe vorerst davon aus, dass für die Überlebenschance der ausgewachsenen Tiere immer noch $b = 0,5$ gilt und bestimme mit Hilfe der Eigenwertgleichung die Matrix $S_{0,5}$.

Da $\begin{pmatrix} 0 & g & g \\ r & 0 & 0 \\ 0 & w & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1500 \\ 600 \\ 900 \end{pmatrix} = 0,8 \cdot \begin{pmatrix} 1500 \\ 600 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 480 \\ 720 \end{pmatrix}$ gelten muss, ergibt sich mit

$$\begin{bmatrix} 600 \cdot g + 900 \cdot g = 1200 \\ 1500 \cdot r = 480 \\ 600 \cdot w + 450 = 720 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} g = 0,8 \\ r = 0,32 \\ w = 0,45 \end{bmatrix} \text{ die Matrix } S_{0,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0,8 & 0,8 \\ 0,32 & 0 & 0 \\ 0 & 0,45 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich steigt die Überlebenschance der ausgewachsenen Säugetiere wegen der neuen Nahrungsquelle – den Insekteneiern – an.

- Bestimme die Matrix S_b in Abhängigkeit vom Parameter b.

Wieder muss $S_b \cdot \vec{e} = 0,8 \cdot \vec{e}$ gelten und mit $\begin{bmatrix} 600 \cdot g + 900 \cdot g = 1200 \\ 1500 \cdot r = 480 \\ 600 \cdot w + 900 \cdot b = 720 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} g = 0,8 \\ r = 0,32 \\ w = 1,2 - 1,5 \cdot b \end{bmatrix}$ ergibt

sich nun die Matrix $S_b = \begin{pmatrix} 0 & 0,8 & 0,8 \\ 0,32 & 0 & 0 \\ 0 & 1,2 - 1,5 \cdot b & b \end{pmatrix}$.

- Erläutere, warum für den Parameter b nun $0,5 < b$ gelten muss.

Die Überlebenschance für die ausgewachsenen Säugetiere haben sich verbessert, darum gilt: $b > 0,5$.

- Die Überlebenschance b der ausgewachsenen Säugetiere und die Überlebenschance w der nicht ausgewachsenen Säugetiere hängen voneinander ab. Bestimme rechnerisch eine im Sachkontext sinnvolle obere Grenze für den Parameter b.

Mit $w > 0$ und $w = 1,2 - 1,5 \cdot b$ folgt dann $1,2 - 1,5 \cdot b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b < 0,8$ und somit, dass $0,8$ eine sinnvolle obere Grenze für die Überlebenschance b der ausgewachsenen Säugetiere ist.

(12 Punkte)

Viel Spaß und Erfolg beim Nachvollziehen und Üben ! ☺

Punkte – Aufgabe – Zuordnung:

Block:	1					2a						2b				2c*	2d*
Teil:	a) i)	a) ii)	a) iii)	b) i)	b) ii)	i)	ii)	iii)	iv)	v)	vi)	i)	ii)	iii)	iv)	–	–
Pkt.:	2	2	2	3	3	2	2	2	1	1	2	2	3	1	2	–	–
Pkt.:	12					10						8				*'3'*	*'12'*
$\varnothing_{[\text{Pkt.}]}$:																	

Resultate:

Note:	1			2			3			4			5			6
$\text{Note}_{[\text{KMK-Pkt.}]}$:	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Ab $\%_{[\text{Vorgabe}]}$:	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	33	27	20	0
Ab $\text{Pkt.}_{[\Sigma=30]}$:	28,5	27	25,5	24	22,5	21	19,5	18	16,5	15	13,5	12	10	8	6	0
#:																
#:																
Stats:	$\Sigma_{\#} =$				$\Sigma_{[\text{Pkt.}]} = 30$				$\varnothing_{[\text{Pkt.}]} =$				$\varnothing_{[\text{KMK-Pkt.}]} =$			

*Die nicht behandelten Abituraufgaben sind hier wie die behandelten Abituraufgaben mit *voller Punktzahl* angegeben, auch wenn diese nicht Bestandteil der Klausur waren!