Name: ______________ **Mathematik** Note: ______________

Teil 1: Ohne Hilfsmittel (d.h. ohne GTR & ohne Formelsammlung) !

a) Das Skalarprodukt:
i) Berechne das folgende Produkt:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} = 1\cdot 2+3\cdot 2+2\cdot 4 = 2+6+8 = 16 \quad [N\!: 4+15+12=31]$$

ii) Berechne die Länge des Vektors $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\\1\end{pmatrix}$.

$$c = \left|\vec{c}\right| = \sqrt{\vec{c}\cdot\vec{c}} = \sqrt{1\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 1+3\cdot 3+1\cdot 1} = \sqrt{1+4+1+9+1} = \sqrt{16} = 4 \quad [N\!: \sqrt{25}=5]$$

iii) Erläutere, ob die Vektoren $\vec{x_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{x_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ paarweise zueinander senkrecht ($\perp$) sind.

$\vec{x}_i\cdot\vec{x}_j = 0$ für $i \neq j$ und $i,j \in \{1,2,3\}$.
Da die Skalarprodukte im gegebenen Fall alle verschwinden, müssen die 3 Vektoren paarweise zueinander senkrecht sein, da die Längen jeweils ungleich 0 sind und mit $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\gamma)$ $[\gamma := \angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)]$.
Somit muss gelten: $\cos(\gamma) = 0$, und mit der für Vektoren sinnvollen Einschränkung '$\gamma \in [0°;180°[$' folgt: $\gamma = 90°$, d.h. im vorliegenden Fall: $\vec{x}_i \perp \vec{x}_j$ für $i \neq j$ und $i,j \in \{1,2,3\}$.

[➲ LB, S. 102 & FS, S. 62 {Multiplikation von Vektoren}] (6 Punkte)

b*) *Zusatzaufgabe:* Erläutere die Lagebeziehung der folgenden Geraden paarweise im Raum (d.h. in $\mathbb{R}^3$):

$$g = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} + u\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}_{=:\vec{a}}; \qquad h = \begin{pmatrix}0\\-7\\3\end{pmatrix} + w\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\-9\end{pmatrix}}_{=:\vec{b}}; \qquad l = \begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix} + v\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\-4\\0\end{pmatrix}}_{=:\vec{c}}.$$

$\vec{a} = -\frac{1}{2}\cdot\vec{c}$, d.h. die Richtungsvektoren $\vec{a}$ der Geraden g und $\vec{c}$ der Geraden l sind linear abhängig (und sogar kollinear, d.h. spannen einen Unterraum der Dimension 1 auf). Somit sind die Geraden l und g entweder parallel (kein Schnittpunkt) oder identisch (alle Punkte sind *Schnittpunkte* bzw. gemeinsame Punkte). Da für $u = 0$: $g \ni (1|-2|3) \notin l$ gilt: $g \parallel l$.
Die Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $\vec{c}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig, somit sind die Geraden g und h bzw. l und h windschief (d.h. nicht parallel und ohne Schnittpunkt) oder haben genau einen Schnittpunkt. h und l haben genau einen Schnittpunkt: $(0|-7|3)$ $[h\!: w=0,\ l\!: v=\frac{1}{2}]$, g und h haben keinen Schnittpunkt (siehe nächste Seite).

[➲ LB, S. 61 & FS, S. 64 {Lagebeziehungen zwischen Geraden}] (3 Punkte)

Zusatz zu b) – dies wurde hier nicht als Lösung erwartet – nur zur Klarstellung:
Bei recht gutem 3-dim. Vorstellungsvermögen erkennt man, dass g und h keinen Schnittpunkt besitzen. Ansonsten müsste man einen Beweis durch Auflösung des LGS [analog Aufgabenteil d] führen:

$$\text{Annahme:}\quad g=h \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-7\\3\end{pmatrix}+w\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-9\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\; u\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+w\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-7\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-5\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&-2&-1\\2&0&-5\\0&9&0\end{array}\right) \xrightarrow[\texttt{rref}]{\text{GTR}} \left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\quad \begin{array}{l}\Leftrightarrow u=0\\ \Leftrightarrow w=0\\ \Leftrightarrow 0\cdot u+0\cdot w=1 \Rightarrow ↯\end{array}$$

Wie man sieht führt die Annahme, g und h hätten einen bzw. mehrere Schnittpunkte, zu einem Widerspruch (Symbol: ↯) – somit haben sie keinen. Gäbe es genau einen Schnittpunkt, wäre in der Lösungsmatrix (GTR: `rref`) die 3. Zeile '0 0 0' und die anderen beiden hätten klare Werte analog zu den beiden Zeilen oben.

c*) *Zusatzaufgabe:* Berechne das folgende Matrix-Produkt:

$$\begin{pmatrix}2&-\frac{1}{3}&1\\-1&0&\frac{1}{5}\\2&1&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0\\0&-\frac{3}{2}\\-3&\frac{10}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot3+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot0+1\cdot(-3) & 2\cdot0+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+1\cdot\frac{10}{9}\\ -1\cdot3+0\cdot0+\frac{1}{5}\cdot(-3) & (-1)\cdot0+0\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{5}\cdot\frac{10}{9}\\ 2\cdot3+1\cdot0+\frac{3}{5}\cdot(-3) & 2\cdot0+1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{9}\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}6-3&\frac{1}{2}+\frac{10}{9}\\-3-\frac{3}{5}&\frac{2}{9}\\6-\frac{9}{5}&-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&\frac{29}{18}\\-\frac{18}{5}&\frac{2}{9}\\\frac{21}{5}&-\frac{5}{6}\end{pmatrix}\left\{=\begin{pmatrix}3&1{,}6\overline{1}\\-3{,}6&0{,}\overline{2}\\4{,}2&-0{,}8\overline{3}\end{pmatrix}\right\}.$$

[➲ LB, S. 156 & FS, S. 70 {Rechnen mit Matrizen} + S. 11 {Rechnen mit Brüchen}] (3 Punkte)

d) Löse das folgende LGS wie geübt über das Gaußsche Eliminationsverfahren – ohne Probe:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&-4&-6\\4&-2&1&5\\2&1&-2&-2\end{array}\right)\Leftrightarrow \begin{array}{rl}2\cdot x+3\cdot y-4\cdot z=-6 & ①\\ 4\cdot x-2\cdot y+1\cdot z=5 & ②\\ 2\cdot x+1\cdot y-2\cdot z=-2 & ③\end{array}\Rightarrow \begin{array}{lrl}②-2\cdot①: & -8\cdot y+9\cdot z=17 & ❶\\ ②-2\cdot③: & -4\cdot y+5\cdot z=9 & ❷\end{array}$$

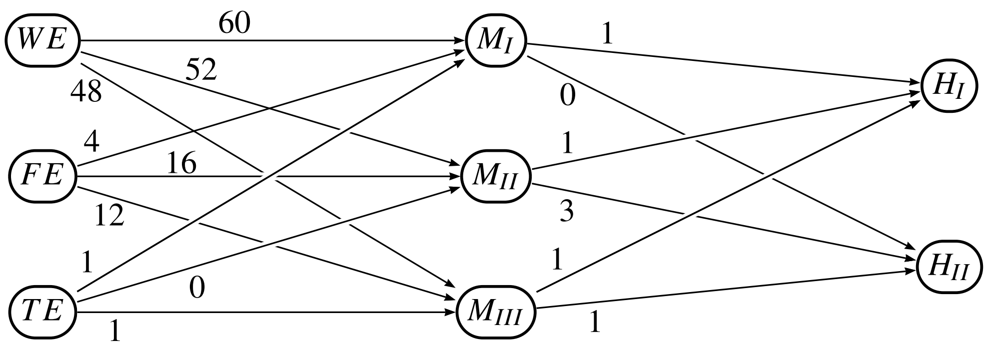
$$\Rightarrow 2\cdot❷-❶:\quad z=1 \overset{❷}{\Rightarrow} -4\cdot y+5=9 \Leftrightarrow y=-1 \overset{③}{\Rightarrow} 2\cdot x-1-2=-2 \Leftrightarrow x=\tfrac{1}{2}.$$

[➲ LB, S. 63f & kl.B., Kap. 3, S. 53ff & FS, S. 72 {Lineare Gleichungssysteme}] (6 Punkte)

Nun kommt Teil 2!

Teil 2: Modulares Bauen [nach Nachschreiber-Abitur 2014: LK/Lineare Algebra]

Eine Architekturfirma baut Gebäude nach einem besonderen Verfahren. Sie lässt Wand-, Fenster- und Türelemente produzieren, die sich zu drei containerähnlichen Gebäudemodulen zusammensetzen lassen: Modul I, Modul II und Modul III. Diese drei Module werden unterschiedlich miteinander kombiniert, um zwei verschiedene Häusertypen herzustellen: Haus I und Haus II.
Dem unten angegebenen Verflechungsdiagramm können die benötigten Bauelemente für die drei Module entnommen werden, ebenso die Anzahl der benötigten Module für die zwei Häusertypen.



a) Löse die folgende Aufgabe mithilfe von Matrix-Vektor-Operationen.

- Gebe die beiden Produktionsmatrizen M und N an. Dabei beschreibt die Matrix M die benötigte Anzahl an Bauelementen für das jeweilige Modul, Matrix N die benötigten Module für den jeweiligen Gebäudetyp. Wähle die im Diagramm von oben nach unten vorgegebene Reihenfolge für die Einträge in den Matrizen.

i) $$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{MI} & \text{MII} & \text{MIII} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 60 & 52 & 48 \\ 4 & 16 & 12 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{WE} \\ \text{FE} \\ \text{TE} \end{array}; \quad N = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{HI} & \text{HII} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{MI} \\ \text{MII} \\ \text{MIII} \end{array}.$$

Mit $P = M \cdot N$ ergibt sich $$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{HI} & \text{HII} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 160 & 204 \\ 32 & 60 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{WE} \\ \text{FE} \\ \text{TE} \end{array}.$$

- Gebe die Bedeutung der ersten Zeile der Matrix P im Sachzusammenhang an.

ii) Die erste Zeile gibt die Anzahl der Wanddelemente für Haus I (160) bzw. Haus II (204) an.

Noch ein wenig durchhalten ...!

Die Architekturfirma möchte drei Gebäude des Typs Haus I und zwei Gebäude des Typs Haus II bauen.

- Berechne, wie viele Bauelemente von jeder Sorte für das Bauvorhaben benötigt werden.

iii) $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{array}{l}\scriptstyle \mathrm{HI} \\ \scriptstyle \mathrm{HII}\end{array}$; $\vec{b} = P \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 160 & 204 \\ 32 & 60 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 888 \\ 216 \\ 8 \end{pmatrix}\begin{array}{l}\scriptstyle \mathrm{WE} \\ \scriptstyle \mathrm{FE} \\ \scriptstyle \mathrm{TE}\end{array}$.

Für die Produktion eines Wandelements wird eine halbe Stunde benötigt. Die Produktion eines Fensterelements braucht zwei Stunden und für ein Türelement werden drei Stunden kalkuliert.

- Bestimme, wie viele Arbeitsstunden benötigt werden, um die Bauelemente des obigen Bauvorhabens zu produzieren.

iv) $\vec{t_R} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{array}{l}\scriptstyle \mathrm{WE} \\ \scriptstyle \mathrm{FE} \\ \scriptstyle \mathrm{TE}\end{array}$, $\quad T_R = \vec{t_R}^{\,T} \cdot P \cdot \vec{p} = \vec{t_R} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 888 \\ 216 \\ 8 \end{pmatrix} = 900.$

Es werden somit 900 Arbeitsstunden benötigt, bei einem 8-Stunden-Tag 112,5 Manntage bzw. bei einer 5-Tage-Woche 22,5 Mannwochen.

[Nebenbemerkungen:

1) Die Elemente von $\vec{t}$ sowie die Zahl 900 haben die Einheit Stunden – Mathematiker lassen dies {leider – Physiker sind hier deutlich konsequenter, insbesondere Experimentalphysiker} ‘unter den Tisch fallen’.

2) Hier wurde nur der Gesamtzeitbedarf in Arbeitsstunden für die Rohstoffe {d.h. WE, FE, TE} betrachtet; in voller Schönheit {d.h. inkl. Zwischenstufen: MI, MII und MIII, und inkl. der Endprodukte: HI und HII} könnte man natürlich den Gesamtzeitbedarf {analog zu den Gesamtkosten} berechnen: $T = T_R + T_Z + T_E = \left(\vec{t_R}^{\,T} \cdot P + \vec{t_Z}^{\,T} \cdot N + \vec{t_E}^{\,T}\right) \cdot \vec{p}$.

3) Mathematiker verwenden weltweit für die Multiplikation: ‘·’, egal ob zwei reelle Zahlen, reelle Zahl und Vektor, zwei Vektoren (Skalarprodukt) oder Matrix / transponierter Vektor mit Vektor / Matrix multipliziert wird [➲ kl.B., S. 18f]. So sind auch Schulbücher (bislang – zum Glück) geschrieben. In HB wird davon (unglücklicher Weise) im Abitur abgewichen, so dass als *Matrixprodukt* ein Frostsymbol verwendet wird, z.B. in der Original-Aufgabenstellung vor a) ii): $P = M * N$.]

[➲ LB, S. 155 – 159 & kl.B., Kap. 2, S. 33 – 51 & FS, S. 73 {Materialverflechtung}] (7 Punkte)

Die Firma, die die Bauelemente und Module herstellt, hat drei Zweigwerke in Deutschland. Diese sind nach dem Leontief-Modell miteinander verbunden. Die Verflechtungen werden durch die untere Tabelle deutlich (Angaben in Mengeneinheiten: ME).

Abgabe von	Abgabe an: Werk I	Werk II	Werk III	Markt	Produktion
Werk I	30	40	10	40	120
Werk II	30	a	20	70	160
Werk III	30	0	40	10	b

b) • Bestimme die fehlenden Parameter a und b.

i) $a = 160 - 70 - 20 - 30 = 160 - 120 = 40$; $\ b = 30 + 0 + 40 + 10 = 80$.

- Gebe die Technologie-Matrix T an.

ii) $$T = \begin{array}{r} \scriptstyle \text{Output} \setminus \text{Input:} \\ \scriptstyle \text{Werk I} \\ \scriptstyle \text{Werk II} \\ \scriptstyle \text{Werk III} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \scriptstyle \text{Werk I} & \scriptstyle \text{Werk II} & \scriptstyle \text{Werk III} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 30/120 & 40/160 & 10/80 \\ 30/120 & 40/160 & 20/80 \\ 30/120 & 0/160 & 40/80 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

- Interpretiere die zweite Spalte der Technologie-Matrix T im Sachzusammenhang.

iii) Die 2. Spalte der Technologiematrix T gibt die Inputs von den Werken I, II und III für Werk II an – jeweils normiert nach dem Gesamtoutput von Werk II; d.h. um 1 ME in Werk II zu produzieren, werden $\frac{1}{4}$ ME von Werk I und $\frac{1}{4}$ ME von Werk II benötigt (in unserem Fall hier nichts von Werk III).

- Berechne die Abgabe an den Markt, wenn die Produktion durch technische Probleme in Werk III auf 50 ME reduziert werden müsste.

iv) Gesamtproduktion in Werk III statt bisher 80 nur noch 50 ME, d.h. Gesamtproduktionsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 120 \\ 160 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Leontief-Modell gilt für die Abgabe auf den Markt: $\vec{y} = (E-T)\cdot\vec{x} \overset{\text{GTR}}{=} \begin{pmatrix} 43{,}75 \\ 77{,}5 \\ -5 \end{pmatrix}.$

- Bewerte das Ergebnis im Sachzusammenhang.

v) Werk III müsste 5 ME vom Markt erhalten, da die gesunkene Produktion nicht mehr ausreicht. Da dies nicht realistisch ist, erzeugt dies ein Problem im Produktionskreislauf.

[➲ LB, S. 164f & kl.B., Kap. 4, S. 82 – 109 & FS, S. 73 {Leontief-Modell}; gleichsam Referenz für c) und d)] (11 Punkte)

⋆ ⋆ ⋆ *Ab hier Zusatzaufgabe:* ⋆ ⋆ ⋆

Durch eine interne Umstrukturierung haben sich die technologischen Bedingungen geändert. Die neu entstandene Verflechtung wird mithilfe der Leontief-Inversen $(E-A)^{-1}$ modelliert:

$$(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1{,}5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf diese neue Matrix.

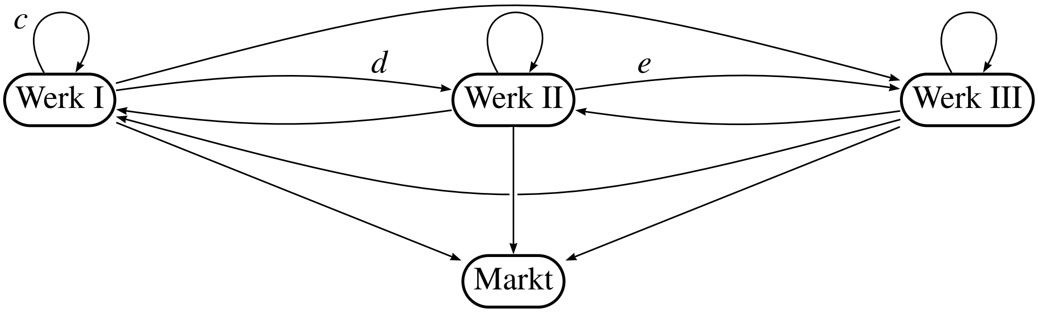
c*) • Zeige, dass für die neue Technologie-Matrix A gilt:

$$A = \begin{array}{r|c} \text{Output: \\ Input:} & \begin{array}{ccc} \text{Werk I} & \text{Werk II} & \text{Werk III} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Werk I} \\ \text{Werk II} \\ \text{Werk III} \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}125 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array}.$$

i) $(E-A) = \left((E-A)^{-1}\right)^{-1} \overset{\text{GTR}}{=} \begin{pmatrix} 0{,}750 & -0{,}500 & -0{,}500 \\ -0{,}125 & 0{,}750 & -0{,}250 \\ -0{,}250 & 0{,}000 & 0{,}500 \end{pmatrix}.$

Für $A = E-(E-A)$ liefert der GTR die oben angegebenen Werte; q.e.d.

- Im nächsten Quartal werden 260 ME des Werks I, 150 ME des Werks II und 180 ME des Werks III produziert. Ermittele die Einträge c, d und e des zugehörigen Verflechtungsdiagramms:



ii) Gesamtproduktion: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 260 \\ 150 \\ 180 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{WI} \\ \text{WII}; \\ \text{WIII} \end{matrix} \quad \left.\begin{matrix} c: & \text{Werk I} \to \text{Werk I} \\ d: & \text{Werk I} \to \text{Werk II} \\ e: & \text{Werk II} \to \text{Werk III} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} c/260 & d/150 & * \\ * & * & e/180 \\ * & * & * \end{pmatrix}.$

$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} c = 0{,}25\cdot 260 = 65 \\ d = 0{,}5\cdot 150 = 75 \\ e = 0{,}25\cdot 180 = 45 \end{matrix}\right.$ bzw. mit unnormierter 'Technologiematrix' [➡ Tabelle & Verflechtungsdiagramm]: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 65 & 75 & 90 \\ 32{,}5 & 37{,}5 & 45 \\ 65 & 0 & 90 \end{pmatrix}.$

(4,5 Punkte)

d*) Die Abgabe an den Markt soll im nächsten Quartal von den drei Werken im Verhältnis von 1 : 1 : 2 gedeckt werden. Die zu produzierende Menge des Werks II soll dabei 140 Mengeneinheiten betragen.

- Ermittel die Produktionsmengen der Werke I und III.

$$y_1 : y_2 : y_3 = 1 : 1 : 2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_2 = \tfrac{1}{2} \cdot y_3, \quad \text{d.h.} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ 2 \cdot y_1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 140 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{x} = (E-A)^{-1} \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1{,}5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ 2 \cdot y_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot y_1 + 2 \cdot y_1 + 8 \cdot y_1 \\ 1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_1 + 4 \cdot y_1 \\ 1{,}5 \cdot y_1 + 1 \cdot y_1 + 8 \cdot y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \cdot y_1 \\ 7 \cdot y_1 \\ 10{,}5 \cdot y_1 \end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 13 \cdot y_1 \\ 140 = 7 \cdot y_1 \\ x_3 = 10{,}5 \cdot y_1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad y_1 = 20 \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow \quad x_1 = 260 \\ \Rightarrow \quad x_3 = 210 \end{array} \right\}.$$

Folglich produziert das Werk I 260 ME und das Werk III 210 ME.

(1,5 Punkte)

Viel Spaß und Erfolg beim Nachvollziehen und Üben! ✌☺

Punkte – Aufgabe – Zuordnung:

Block:	1						2										
Teil:	a) i)	ii)	iii)	b)*	c)*	d)	a) i)	ii)	iii)	b) i)	ii)	iii)	vi)	v)	c)*i)	*ii)	d)*
Pkt.:	3	1,5	1,5	*3*	*3*	6	3	1	2	2	3	2	3	1	*2*	*2,5*	*1,5*
Pkt.:	12^{+6}						18^{+6}										
$\varnothing_{[\text{Pkt.}]}$:																	

Resultate:

$\text{Note}_{[\text{KMK-Pkt.}]}$:	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Note:	1			2			3			4			5			6
Ab $\%_{[\text{Vorgabe}]}$:	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	33	27	20	0
Ab $\text{Pkt.}_{[\Sigma=30]}$:	28,5	27	25,5	24	22,5	21	19,5	18	16,5	15	13,5	12	10	8	6	0
#:																
#:																
Stats:	$\Sigma_{\#} =$				$\Sigma_{[\text{Pkt.}]} = 30^{+12}$					$\varnothing_{[\text{Pkt.}]} =$			$\varnothing_{[\text{KMK-Pkt.}]} =$			

*Zusatzaufgaben haben nur *die halbe Punktzahl* von der bekommen, die sie eigentlich verdienen!