Mathematik

Die drei Bereiche des Ableitens [LB, S. 19ff+(30-40)+72 {I.} & (46-52)+(65-74) {II.} & (41-45)+(58-62)+73 {III.}]

I. Fundament durch Grenzwertprozess [LB, S. 19ff+(30-40)+72]

Übergang Differenzenquotient → Differentialquotient: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}$

$\to \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} =: f'(x_0) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0),\ \ f'(t) \equiv \dot{f}(t),\ \ f''(t) \equiv \ddot{f}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t)\right)$;

Bedeutung/Unterschied (mittlere Änderungsrate → momentane Änderungsrate [**abstrakt**] {z.B. mittlere Geschwindigkeit → Momentangeschwindigkeit: $\vec{v} = \dot{\vec{s}}$ [**physikalisch**]} bzw. Sekantensteigung → Tangentensteigung [**geometrisch**]);

Art des Übergangs (Grenzwertbildung, d.h. *limes*, d.h. 'x gegen x_0' bzw. 'h gegen 0'),

Zweck/Wert der Grenzwertbetrachtung (ermöglichte erst einen sauberen Beweis; klares Fundament – im Vergleich zu den ursprünglichen und problematischen infinitesimalen Größen – führt direkt zu algebraischen Regeln, um aus der Funktionsgleichung die Gleichung der Ableitung zu konstruieren).

[Vgl. Zusammenfassung zur 'Analysis: Differential- & Integralrechnung' bzw. 'Einführung in die Infinitesimalrechnung'!]

II. Algebraisches Ableiten [LB, (46-52)+(65-74)]

Ableitungsregeln (4 bis 6, je nach Lesart ... am sinnvollsten 0 – 5 wie folgt):

0) Vor dem Ableiten wird die Funktion maximal vereinfacht: [Reine Vorarbeit; noch kein Ableiten!]
   a) Klammern in Produkten werden ausmultipliziert (d.h. Distributivgesetz; Binomische Formeln [1. – 3.]);
   b) Sortieren nach absteigenden Potenzen von x (von höchster zu geringster Potenz der Variablen);
   c) Faktoren werden zu einem Koeffizienten zusammengefasst (multiplikativ/additiv – dies ggf. vor jeder weiteren Ableitung).

1) Konstanten fallen beim Ableiten weg: $f(x) = v$; $f'(x) = 0$ $(\forall v \in \mathbb{R})$.

2) Die Ableitung von x ist 1: $f(x) = x$; $f'(x) = 1$. [D.h. keine Definitionslücke bei $x = 0$, wie es bei der Deutung von '3)' für $x = x^1$ zu erwarten wäre; alle ganzrationalen Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert!].

3) Potenzen von x werden durch das Ableiten wie folgt verändert:
   der alte Exponent wird als weiterer Vorfaktor ergänzt, der neue Exponent entspricht dem um 1 verminderten alten Exponenten:
   $f(x) = x^n$; $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

4) Faktoren (d.h. Zahlen/Konstanten) im Produkt mit der Variablen bleiben beim Ableiten erhalten:
   $f(x) = c \cdot g(x)$; $f'(x) = c \cdot g'(x)$.

5) Additive Glieder werden gliedweise abgeleitet und diese Ableitungen zur gesamten Ableitung addiert: $f(x) = g(x) + h(x)$; $f'(x) = g'(x) + h'(x)$.

Beispielaufgaben zum algebraischen Ableiten: [Ergebnis ist wie üblich maximal zu vereinfachen!]

Gebe die 4 (bzw. 5 oder 6) eingeführten Ableitungsregeln an und berechne dann damit $f'(x)$:

a) $f_1(x) = 999$; b) $f_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2 \cdot x^5$; c) $f_3(x) = x^3 \cdot (x + \frac{5}{3})$; d) $f_4(d) = d \cdot x^3 - x^2$;

e) $f_5(x) = 3 \cdot (x-9) \cdot (x+9) \cdot x$; f) $f_6(x) = 2\frac{1}{3} \cdot x^5 + \frac{3}{7} \cdot x^9 + 7 \cdot x^6$;

g) $f_7(u) = \frac{1}{3} \cdot (u \cdot x^2 + x^3 \cdot u^2)^2$; h) $s(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$; i) $V_{\text{Kugel}}(r) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ (Bedeutung?).

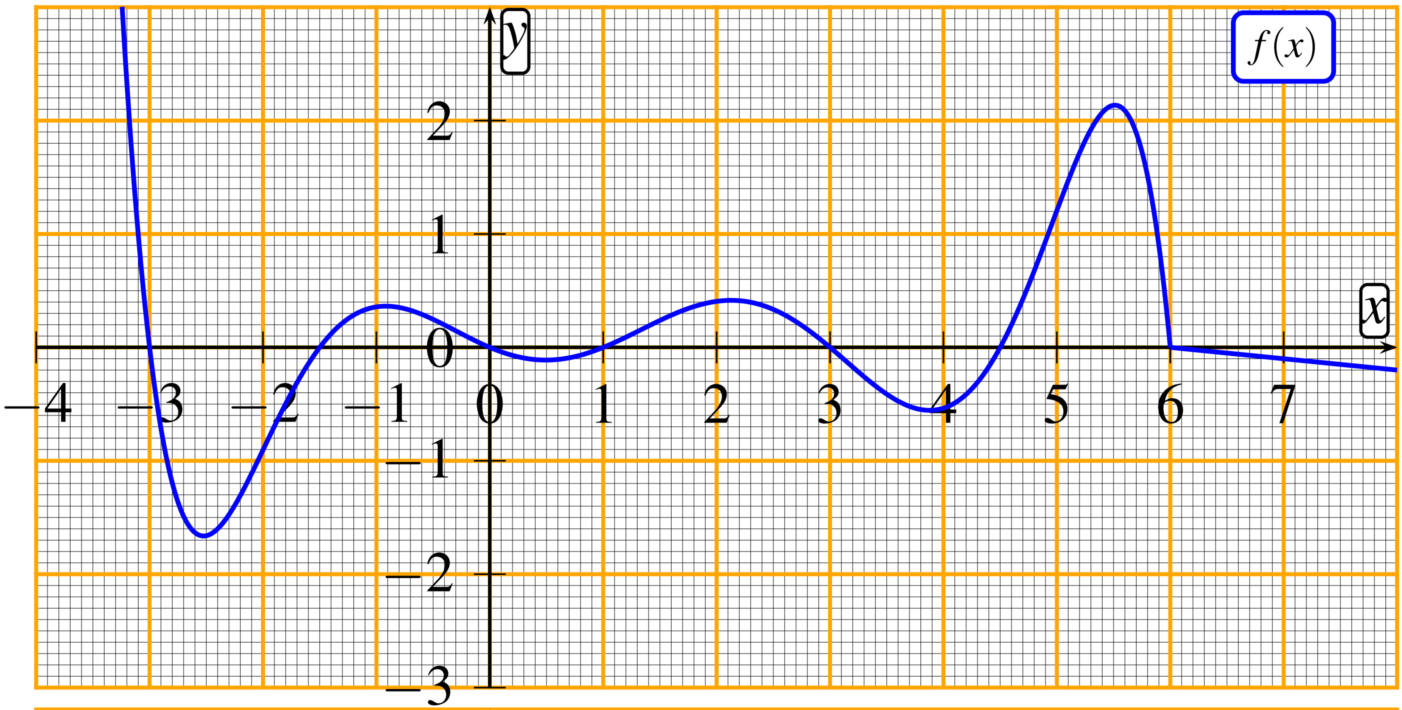
III. Graphisches Ableiten [LB, (41-45)+(58-62)+73f]

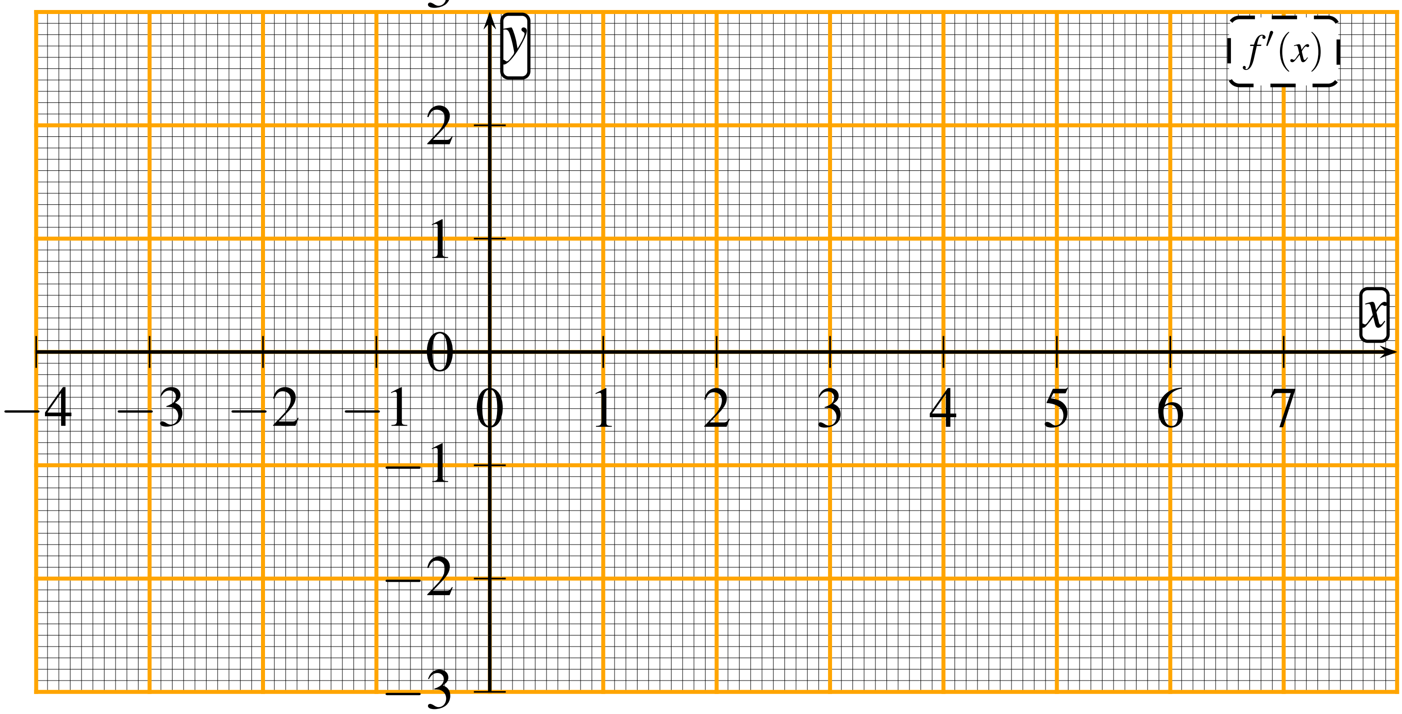
Gegeben werden zwei Koordinatensysteme untereinander, oben die Funktion, unten sollte dann die Ableitung qualitativ gezeichnet werden. Extrempunkte (XPs, d.h. Hoch- und Tiefpunkte, HPs und TPs) der Funktion werden zu Nullstellen (NSs) in der Ableitung; Wendepunkte (WPs) werden zu Extrempunkten (XPs, d.h. HPs und TPs). Am Anfang und Ende des Sichtfensters des Koordinatensystems wie bei WPs wird die Steigung grob über das Steigungsdreieck der Tangente ermitteln (vgl. Zusammenfassung 'Gefühl für Ganzrationale Funktionen', darin '1. Lineare Funktionen').

Beispielaufgabe zum graphischen Ableiten:

1. Leite graphisch ab, so dass der untere Graph die qualitative Ableitungsfunktion darstellt.

[Auf genaue Werte kommt es nicht an, nur auf relative – sonst würde es hier den Zeitrahmen sprengen.]





Beispielaufgabe zum graphischen Ableiten (Fortsetzung):

2. Erläutere Dein Vorgehen beim graphischen Ableiten:
   Welche Stellen der Funktionen werden auf welche Stellen der Ableitungsfunktion abgebildet – wie erhält man die Anfangs- und Endwerte der Ableitungsfunktion, wenn dort keine speziellen Stellen bei der Funktion liegen – was passiert mit dem Grad der Funktion (höchster Exponent der Variablen)?

IV. Ableiten

Alle ganzrationalen Funktionen lassen sich algebraisch mit diesen Regeln [0) – 5) aus II.] problemlos und exakt ableiten und mithilfe der Beschreibung zum graphischen Ableiten [III.] auch recht schnell qualitativ ableiten, so dass der Verlauf der Ableitungsfunktion klar wird und der Prozess des Ableitens auch an Anschaulichkeit gewinnt! [Siehe z.B. LB S. 62, Nr. 6.]
Während das graphische Ableiten für beliebige geplottete Funktionen anwendbar ist, sind beim algebraischen Ableiten weitere Ableitungsregeln notwendig (vgl. Zusammenfassung 'Analysis: Kurvendiskussion', darin 'Ableiten/Erzeugen der Ableitung einer Funktion').

Viel Spaß und Erfolg beim Anwenden ! ☺✌

Struktur des Vorgehens zum Erlernen des **Ableitens** (**algebraisch und graphisch**):

- **Folgen und Grenzwert**
  [LB, **RKs** S. 11 + 15 + 16 + 20 + 21 + 25 & **KT** S. 27]
  ➥ [für diesen 1. Punkt] meine Zusammenfassung: "**Analysis: Folgen, Reihen und Grenzwert**"
- **Differenzenquotient und Differentialquotient**
  [LB, **RKs** S. 32 + 37 + 38 + 55 & **KT** S. 72]
  ➥ [dieser Punkt ebenso:] "**Analysis: Differential- & Integralrechnung**"
- **Algebraisches Ableiten** einfacher (d.h. ganzrationaler) Funktionen
  [LB, **RKs** S. 48 + 50 + 51 + 52 {2×} + 66 + 69 {2×} + 70 & **KT** S. 73 (Regeln)]
  ➥ [dieser Punkt ebenso:] "**Analysis: Kurvendiskussion**"
- **Graphisches Ableiten**
  [LB, **RKs** S. 43 + 60 {Tabelle} & **KT** S. 73 (Graphen)]
  ➥ [für alle 3 vorigen Punkte] meine Zusammenfassung: "**Analysis: Ableitungsarten & Aufgaben**"

LB – eingeführtes Lehrbuch: "**Elemente der Mathematik**", Analysis, RP, GK, Schröder/Westermann, ISBN 978-3-507-88410-6, 244 S. (geb.), 2019;
LB – eingeführtes Lehrbuch: "**Elemente der Mathematik**", Analysis, RP, LK, Schröder/Westermann, ISBN 978-3-507-88422-9, 374 S. (geb.), 2017
[allerdings hier GK → LK: 19 → 19, (30-40) → (44-55), 72 → 95, (46-52) → (61-67), (65-74) → (83-92); (41-45) → (56-60), (58-62) → (73-78), 73f → 96f, (S. 62, Nr. 6) → (S. 72, Nr. 7)];
RKs: Rote Kästen/Essenz;
KT: Klausurtraining/Das Wichtige im Überblick.