Mathematik

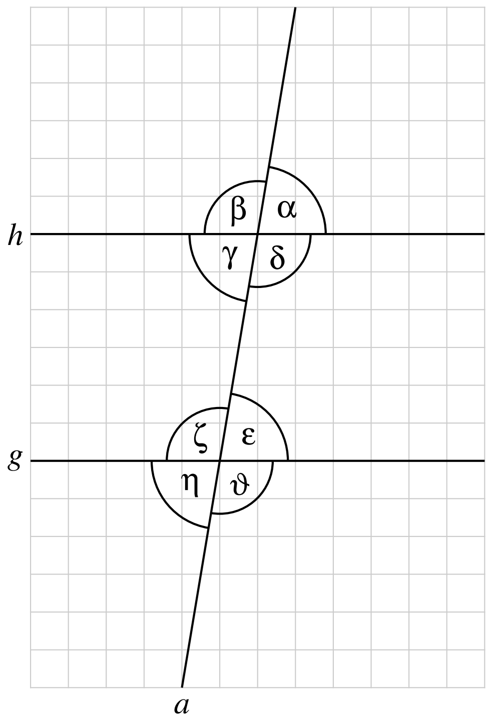
Ähnlichkeit

	Kongruenz (Symbol: $\cong$)	Ähnlichkeit (Symbol: $\sim$)
Eigenschaften:	alle Winkel und **Seitenlängen sind entsprechend gleich** (kongruent = deckungsgleich)	alle Winkel sind gleich und die **Seitenlängen stehen im selben Verhältnis** (d.h. Streckungsfaktor k, Flächenfaktor k^2)
Operationen:	Verschieben, Rotieren, Spiegeln/Umdrehen	Verschieben, Rotieren, Spiegeln/ Umdrehen, **Strecken/Stauchen**
Menge:	Spezialfall/Untermenge der Ähnlichkeit	Verallgemeinerung/Obermenge der Kongruenz

Zentrische Streckung

Konstruktionsvorschrift, über ein (vorgegebenes bzw. geeignet gewähltes) Streckungszentrum Z eine beliebige Figur F auf eine um den Streckungsfaktor k veränderte Abbildungsfigur G abzubilden ($F \sim G$, d.h. F und G sind ähnlich). Dabei werden zunächst von Z ausgehend Hilfsgeraden durch alle Ecken der abzubildenden Figur gezeichnet und die Abstände um den Faktor k verlängert bzw. verkürzt, d.h. es ergibt sich:
$1 < k$: Vergrößerung; $0 < k < 1$: Verkleinerung; $k = 1$: Identität (d.h. Kongruenz).
$k < 0$: Zeichnung über Streckungszentrum hinaus (d.h. von Ecke der abzubildenden Figur zum Zentrum und darüber hinaus; $k = -1$ bedeutet $|A'Z| = |ZA| = \frac{1}{2}|A'A|$; vgl. Abb. zum Strahlensatz auf der Rückseite), bzgl. $|k|$ gelten obige 3 Kategorien, allerdings wird die Abbildung immer gespiegelt (d.h. 'umgedreht').

Winkelbeziehungen aus früheren Schuljahren



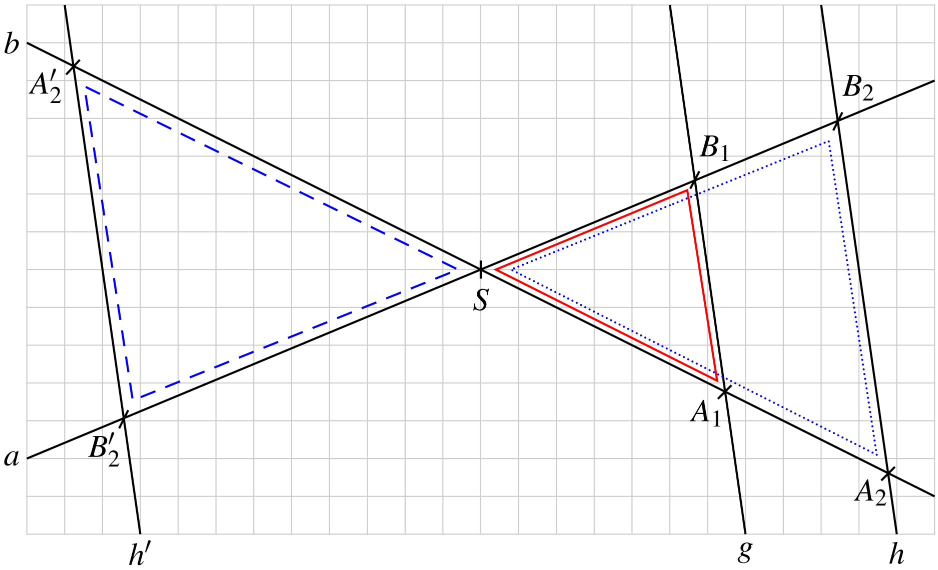
Voraussetzung: $g \,||\, h$;
andere Winkel sind beliebig.

Dann gilt:

i) **Nebenwinkel** ergeben zusammen 180°;
Nebenwinkelpaare der Zeichnung:
(α,β), (β,γ), (γ,δ), (δ,α);
(ε,ζ), (ζ,η), (η,ϑ), (ϑ,ε).
ii) **Scheitelwinkel** sind gleich groß;
Scheitelwinkelpaare der Zeichnung:
(α,γ), (β,δ);
(ε,η), (ζ,ϑ).
iii) **Stufenwinkel** sind gleich groß;
Stufenwinkelpaare der Zeichnung:
(α,ε), (β,ζ), (γ,η), (δ,ϑ).
iv) **Wechselwinkel** sind gleich groß;
Wechselwinkelpaare der Zeichnung:
(α,η), (β,ϑ), (γ,ε), (δ,ζ).

Strahlensatz

Da zwei Dreiecke ähnlich zueinander sind, wenn sie in zwei (und wegen der festen Winkelsumme von 180° somit in allen drei) Winkeln übereinstimmen, erkennt man in der unteren Abbildung direkt drei ähnliche Dreiecke, da der Winkel bei S entweder identisch ist [$\sphericalangle A_1SB_1$] oder die beiden Winkel ein Scheitelwinkelpaar bilden [$\sphericalangle A_1SB_1$ und $\sphericalangle A_2'SB_2'$] und z.B. die jeweiligen Eck-Winkel bei A_1 [$\sphericalangle B_1A_1S$] und A_2 [$\sphericalangle B_2A_2S$] (bzw. A_2' [$\sphericalangle B_2'A_2'S$]) ein Stufenwinkel- (bzw. Wechselwinkel-) Paar bilden. Aus dem gleichen Seitenlängenverhältnis entsprechender Seiten von ähnlichen Dreiecken folgen somit die beiden Strahlensätze:



Voraussetzung: $g \| h$ und $h \| h'$; andere Winkel sind beliebig.

Dann gilt:

$\Delta SA_1B_1 \sim \Delta SA_2B_2$ (mit $k = \frac{5}{3}$) sowie
$\Delta SA_1B_1 \sim \Delta SA_2'B_2'$ (mit $k' = -\frac{5}{3}$).

Daraus folgt:

1. Strahlensatz:

$\frac{|SA_1|}{|SA_2|} = \frac{|SB_1|}{|SB_2|}$ bzw. $\frac{|SA_1|}{|SA_2'|} = \frac{|SB_1|}{|SB_2'|}$.

Eweiterung 1. Strahlensatz:

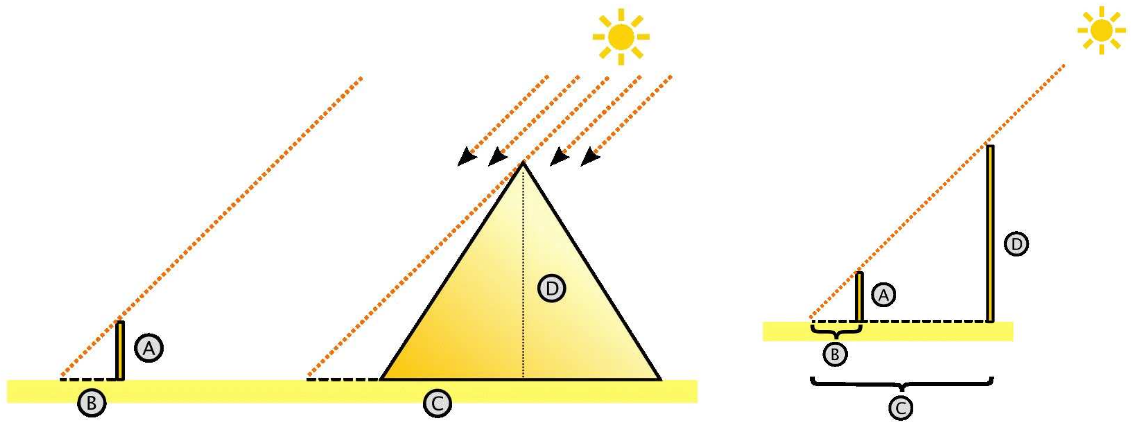
$\frac{|SA_1|}{|A_1A_2|} = \frac{|SB_1|}{|B_1B_2|}$ bzw. $\frac{|SA_1|}{|A_1A_2'|} = \frac{|SB_1|}{|B_1B_2'|}$.

2. Strahlensatz:

$\frac{|SA_1|}{|SA_2|} = \frac{|A_1B_1|}{|A_2B_2|}$ bzw. $\frac{|SA_1|}{|SA_2'|} = \frac{|A_1B_1|}{|A_2'B_2'|}$.

Anwendung des Strahlensatzes

Thales von Milet (624 v. Chr. – 547 v. Chr., ein antiker griechischer Philosoph, Mathematiker und Astronom) soll mit Hilfe eines Stabes durch Messung der Schattenlänge die Höhe der ägyptischen Cheopspyramide ermittelt haben:



Zunächst bestimmt man die Seitenlänge der Pyramide (230 m) und anschließend die Länge des Schattens eben jener (65 m; d.h. $C = 65\text{ m} + \frac{1}{2} \cdot 230\text{ m}$). Anschließend steckt man einen Stab senkrecht in den Boden und vermisst dessen Höhe ($A = 1{,}63$ m) und dessen Schattenlänge ($B = 2{,}00$ m).
Gesucht ist die Höhe der Pyramide (D), die wie folgt über den 2. Strahlensatz berechnet werden kann:

$\frac{D}{A} = \frac{C}{B} \Rightarrow D = \frac{A \cdot C}{B} = \frac{1{,}63\text{ m} \cdot \left(65\text{ m} + \frac{1}{2} \cdot 230\text{ m}\right)}{2{,}00\text{ m}} = \frac{1{,}63\text{ m} \cdot 180\text{ m}}{2{,}00\text{ m}} = \underline{146{,}7\text{ m}}$ {heute durch 4600 a Erosion: 138,75 m}.

[Aus Wikipedia, URL: http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Strahlensatz&oldid=126463448.]