Mathematik

Analysis: Kurvendiskussion

- **Funktion:** Eine Funktion oder Abbildung ist eine Beziehung (Relation) zwischen zwei Mengen, die jedem Element der einen Menge (Definitionsmenge: $\mathbb{D}$; Funktionsargument, unabhängige Variable, x-Wert) genau ein Element der anderen Menge (Zielmenge/Wertebereich: $\mathbb{W}$; Funktionswert, abhängige Variable, y-Wert) zuordnet: $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}, x \mapsto y$. Die Menge $\mathbb{G}_f = \{(x|y): y = f(x)\}$ heißt (Funktions-) Graph von f.

  ☞ **Ganzrationale Funktionen vom Grad n:**
  Dies sind Polynome des Typs ($a_n \neq 0$): $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$.
  $n = 1$: lineare F., $n = 2$: quadratische F., $n = 3$: kubische F., $n = 4$: quartische Funktion.
  [a_0: konstantes Glied – Verschiebung entlang y-Achse – alle anderen Glieder bestimmen Form, z.B.: $a_1 \cdot x$: lineares Glied, $a_2 \cdot x^2$: quadr. Glied, ...]
  Die faktorisierte Form zeigt die Nullstellen ($x_{\mathrm{NS},i}$) bzw. lässt sich aus diesen erzeugen:
  $f(x) = (x - x_{\mathrm{NS},1})^{k_1} \cdot (x - x_{\mathrm{NS},2})^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_{\mathrm{NS},m})^{k_m} \cdot g(x)$ mit
  $g(x)$: ganzrationaler Funktion ohne Nullstellen, k_i: Vielfachheit der jeweiligen Nullstelle.

  ☞ **Gebrochenrationale Funktion:**
  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$: g und h sind beliebige ganzrationale Funktionen.

  ☞ **Trigonometrische Funktionen:**
  Winkelfunktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ und daraus zusammengesetze Funktionen (Physik: Schwingungen und Wellen).

  ☞ **Exponentialfunktion:** e-Funktion mit $f(x) = e^x$, $f'(x) = f(x)$ (Anwendung: exponentielles Wachstum, (Ent-)Laden eines Kondensators).

- **Ableiten/Erzeugen der Ableitung einer Funktion:**
  Man schließt vom Bestand auf die Änderung ($f(x) \to f'(x)$), z.B. von der Wegfunktion auf die Geschwindigkeit ($s(t) \to s'(t) = \dot{s}(t) = v(t)$).

  ➢ **Ableitungstypen:**

$f(x)$	c	x^n	e^x	a^x	$\ln(x)$	$\log_a(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$f'(x)$	0	$n \cdot x^{n-1}$	e^x	$a^x \cdot \ln(a)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$

  ➢ **Ableitungsregeln:**

$f(x)$	$c \cdot u(x)$	$u(x) \pm v(x)$	$u(x) \cdot v(x)$
$f'(x)$	$c \cdot u'(x)$	$u'(x) \pm v'(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$f(x)$	$u(x)/v(x)$	$u\big(v(x)\big)$
$f'(x)$	$\big(u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)\big)/\big(v(x)\big)^2$	$u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)$

  Die erste Ableitung kann man graphisch über die Steigung der Tangente am Graphen im jeweiligen Punkt x ermitteln und gibt die Änderungsrate der Funktionswerte wieder:
  ☞ $f'(x) > 0$: (streng monotones) Steigen,
  ☞ $f'(x) < 0$: (streng monotones) Fallen.
  Die zweite Ableitung gibt die Krümmung wieder:
  ☞ $f''(x) > 0$: Linkskurve/Konvexbogen (nach oben offen; Graph unterhalb der Verbindungsstrecke zweier Punkte),
  ☞ $f''(x) < 0$: Rechtskurve/Konkavbogen (nach unten offen; Graph oberhalb der Verbindungsstrecke zweier Punkte).
  Beim graphischen Ableitung werden HPs/TPs [von $f(x)$] zu NSs [von $f'(x)$], WPs [von $f(x)$] zu XPs [von $f'(x)$].
  Die Umkehrung des Ableitens ist die Integration (liefert Stammfunktion $F(x)$ – hierbei muss ggf. die Integrationskonstante durch existierende Randbedingungen bestimmt werden): $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)|_a^b \equiv [F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$.

❍ Sprungfrei/knickfrei/ruckfrei (Begriffe aus der Trassierung):

- **Sprungfreiheit:** Die Funktion $f(x)$ existiert und ist stetig (keine Lücken im Definitionsbereich, keine Sprünge im Wertebereich; d.h. beim Zeichnen des Graphen muss der Stift nicht abgesetzt werden).
- **Knickfreiheit:** Die (erste) Ableitungsfunktion $f'(x)$ existiert und ist stetig.
- **Ruckfreiheit:** Die zweite Ableitungsfunktion $f''(x)$ existiert und ist stetig.

❍ Kurvendiskussion:

An Hand der Kurvendiskussion kann man wesentliche Merkmale einer Funktion sammeln, an Hand denen man z.B. den Graphen 'aus dem Handgelenk' recht genau skizzieren kann.
Andererseits kann man aus solchen Angaben auch die Funktionsgleichung bestimmen, also quasi 'rekonstruieren' (Steckbriefaufgaben).
Hier die wesentlichen Charakteristika:

- Definitionsbereich $\mathbb{D}$ und Wertebereich $\mathbb{W}$ sowie Stetigkeit (ggf. neben der von f auch von f', f'', ...)
- **Verhalten** gegen $+/-$ Unendlich $(\pm\infty)$: bei ganzrationalen Funktionen bestimmt dies das Glied mit der höchsten Potenz inkl. des Vorzeichens dessen Koeffizienten a_n $\left(\text{z.B. } f(x)=x^3:\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\to-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\to+\infty\right)$ – zudem setzt sich die e-Funktion gegenüber Potenzen durch.
  Verhalten nahe Null: bei Polynomen bestimmt dies das (/die) Glied(er) geringster Potenz.
- **Monotonie:**
  - ➢ $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$: monoton steigend/isoton;
  - ➢ $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$: streng monoton steigend;
  - ➢ $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$: monoton fallend/antiton;
  - ➢ $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$: streng monoton fallend.
- **Symmetrie:**
  - ➢ $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}$: Achsensymmetrie zur y-Achse [auch '$f(x)$-Achse', d.h. zur Achse $x=0$]
    - ➥ Ganzrationale Funktionen mit geraden Exponenten von x, z.B. $f(x) = x^4 + 3\cdot x^2 + 2$ $\{\text{da } 2 \equiv 2\cdot x^0\}$,
    - ➥ $f(x_0 - h) = f(x_0 + h)$: allgemein Symmetrie zur Achse $x = x_0$, d.h. einer Parallelen zur y-Achse;
  - ➢ $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}$: Punktsymmetrie zum Koordinaten-Ursprung [d.h. zum Punkt $(0|0)$]
    - ➥ Ganzrationale Funktionen mit ungeraden Exponenten von x, z.B. $f(x) = -x^5 + 4\cdot x^3 + 2\cdot x$ $\{\text{da } 2\cdot x \equiv 2\cdot x^1\}$,
    - ➥ $f(x_0 - h) - y_0 = y_0 - f(x_0 - h)$: allgemein Symmetrie zum Punkt $(x_0|y_0)$ [Drehung von 180° um diesen Punkt liefert denselben Graphen].
- **Periodizität:** $f(x+p) = f(x)$ (z.B. für $f(x) = \sin(x)$ gilt: $p = 2\cdot\pi$)
- **Asymptoten:**
  - ➢ waagerechte/in x-Richtung: Konvergenz (z.B. $f(x) = 1/x$ bei $y = 0$ bzw. $x \to \pm\infty$);
  - ➢ senkrechte/in y-Richtung: Pol (z.B. $f(x) = 1/x$ bei $x = 0$ mit Vorzeichenwechsel; generell bei gebrochen-rationalen Funktionen an den Nullstellen des Nennerpolynoms, wenn es nicht durch Nullstellen des Zählerpolynoms *ausgeglichen* wird).
- **Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:**
  - ➢ $f(0) = y$: Schnittpunkt mit y-Achse [d.h. $\text{SP}_{\text{YA}} = (0|f(0))$ mit $f(0) \equiv a_0$: 'Aufzug'];
  - ➢ $f(x) = 0$: Nullstellen/SP mit x-Achse [d.h. $\text{NS}_i = (x_{\text{NS},i}|0)$; nutzbar für Faktorisierung/Linearfaktorzerlegung]
  - ➥ Ganzrationale Funktion mit n Nullstellen $\Rightarrow$ Funktion ist mindestens n. Grades.
- **Extrema:** $f'(x_{\text{XP},i}) = 0,\ f''(x_{\text{XP},i}) \neq 0$ (allgemein: die erste nicht verschwindende Ableitung ist gerader Ordnung und somit die hinreichende, die vorige verschwindende Ableitung die notwendige Bedingung bzw. Extremalbedingung)
  - ➢ $f'(x_{\text{HP},i}) = 0,\ f''(x_{\text{HP},i}) < 0$: Maxima/Hochpunkte [d.h. $\text{HP}_i = (x_{\text{HP},i}|f(x_{\text{HP},i}))$] bzw.
  - ➢ $f'(x_{\text{TP},i}) = 0,\ f''(x_{\text{TP},i}) > 0$: Minima/Tiefpunkte [d.h. $\text{TP}_i = (x_{\text{TP},i}|f(x_{\text{TP},i}))$].
  - ➥ Statt der 2. Ableitung kann als Kriterium auch der Vergleich der y-Werte in der Umgebung des XPs verwendet werden [Vorzeichenwechsel: VZW].
  - ➥ Ganzrationale Funktion mit n Extrema (= NSs von $f'(x)$) $\Rightarrow$ Funktion ist mindestens $(n+1)$. Grades.
- **Wendepunkte:** $f''(x_{\text{WP},i}) = 0,\ f'''(x_{\text{WP},i}) \neq 0$ (allgemein: die erste nicht verschwindende Ableitung > 2. Ordnung ist von ungerader Ordnung)
  - ➢ $f''(x_{\text{WP}_{\text{L}\to\text{R}},i}) = 0,\ f'''(x_{\text{WP}_{\text{L}\to\text{R}},i}) < 0$: Wendepunkte mit Übergang Links- in Rechtskurve bzw.
  - ➢ $f''(x_{\text{WP}_{\text{R}\to\text{L}},i}) = 0,\ f'''(x_{\text{WP}_{\text{R}\to\text{L}},i}) > 0$: Wendepunkte mit Übergang Rechts- in Linkskurve.
  - ➥ Statt der 3. Ableitung kann als Kriterium auch ein Vorzeichenwechsel der 2. Ableitung in der Nähe des WPs herangezogen werden.
  - ➥ Ganzrationale Funktion mit n Wendepunkten (= NSs von $f''(x)$) $\Rightarrow$ Funktion ist mindestens $(n+2)$. Grades.
  - ➥ Gilt zusätzlich $f'(x_{\text{WP},i}) = 0$: Sattelpunkte/Horizontalwendepunkte/Terrassenpunkte (d.h. spezieller WP).

➲ Mathebuch bzw. Wikipedia: `http://de.wikipedia.org/wiki/Kurvendiskussion`
und `http://de.wikipedia.org/wiki/Funktion_%28Mathematik%29`