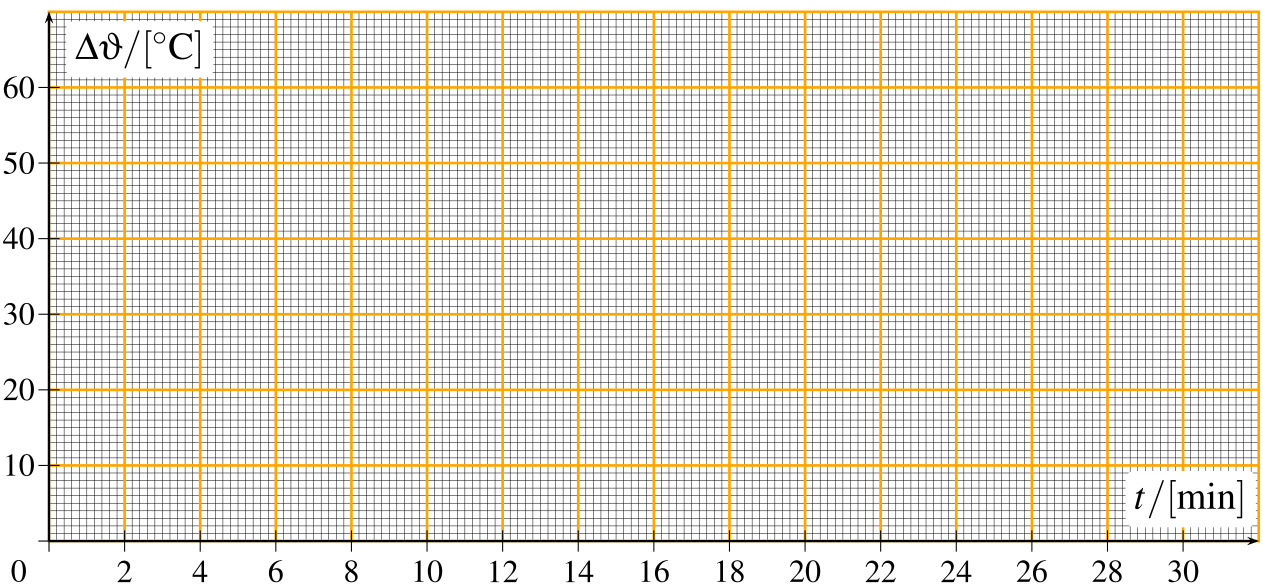
Mathematik

Anwendung: Abkühlen von heißen Getränken/Speisen

Eine Tasse mit heißem Tee (wahlweise: heißer Kaffee oder heiße Suppe) hat nach dem Aufbrühen eine um 60°C höhere Temperatur als die Umgebung und kühlt am Anfang mit einer Geschwindigkeit von 9°C/min ab.

Newton'sches Abkühlungsgesetz

Die Abkühlungsgeschwindigkeit $a(t)$ (in °C/min) ist proportional zu der Temperaturdifferenz $f(t)$ (in °C) zwischen (heißem) Körper und seiner (kühleren) Umgebung.



Überleitung DGL: Exponentielles Wachstum zu beschränktem Wachstum

$\vartheta(t) = f(t) + \vartheta_0 = a \cdot e^{\lambda \cdot t} + \vartheta_0 = S + a \cdot e^{\lambda \cdot t} = S + (\vartheta(0) - S) \cdot e^{\lambda \cdot t}$.
$\vartheta'(t) = \lambda \cdot (\vartheta(t) - S)$: <u>Differentialgleichung (DGL)</u>
S: Sättigungsgrenze (gelegentlich auch K: Kapazität bzw. P/G: obere Schranke); $\vartheta \to f$ (reine Umbenennung); $\Rightarrow$ s.u.

Differentialgleichung (DGL): Eine Gleichung, in der die (ggf. höhere – die höchste bestimmt die Ordnung der DGL) Ableitung vorkommt und über die eine Funktion gefunden werden muss. Dies erfolgt typisch über einen Ansatz (untere drei Beispiele der Wachstumstypen) oder bei konkreter Angabe einer Ableitung durch Integration (Randbedingungen sorgen entsprechend für Bestimmung der Integrationskonstante{n} – bei x. Ordnung x Integrationen).

1. Exponentielles Wachstum

$f'(t) = k \cdot f(t)$: DGL für exponentielles Wachstum;
$f(t) = a \cdot e^{k \cdot t} = a \cdot b^t$: Ansatz; $a = f(0)$; $k = \frac{f'(0)}{f(0)} = \ln(b)$; $t_V = \frac{\ln(V)}{k}$, V: Verhältnis [z.B. Verdopplung: $V = 2$].

2. Beschränktes Wachstum

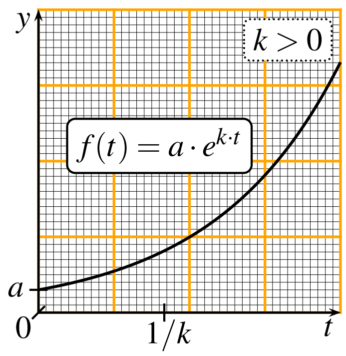
$f'(t) = k \cdot (S - f(t))$: DGL für beschränktes Wachstum;
$f(t) = S + a \cdot e^{-kt} = S + (f(0) - S) \cdot e^{-kt}$: Ansatz; $a = f(0) - S$; $k = \frac{f'(0)}{S - f(0)} > 0$.

3. Logistisches Wachstum

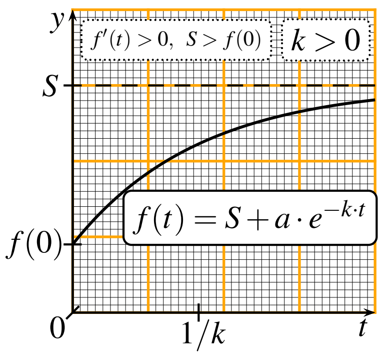
$f'(t) = k \cdot f(t) \cdot (S - f(t))$: DGL für logistisches Wachstum
$f(t) = \frac{c}{1 + a \cdot e^{-b \cdot t}}$: Ansatz, $c \overset{t \to \infty}{=} S$, $a = \frac{S}{f(0)} - 1$ [wegen $f(0) = S/(1+a)$], $b = k \cdot S$ [wegen $k \overset{\text{DGL}}{=} \frac{f'(t)}{f(t) \cdot (S - f(t))} \overset{\text{CAS}}{=} \frac{b}{S}$].
$f(t) = \frac{S}{1 + \left(\frac{S}{f(0)} - 1\right) \cdot e^{-k \cdot S \cdot t}} \quad \left[= \frac{f(0) \cdot S}{f(0) + (S - f(0)) \cdot e^{-k \cdot S \cdot t}} = \frac{f(0) \cdot S \cdot e^{k \cdot S \cdot t}}{f(0) \cdot e^{k \cdot S \cdot t} + S - f(0)} = S - \frac{(S - f(0)) \cdot S}{f(0) \cdot e^{k \cdot S \cdot t} + S - f(0)}\right]$.
Anfangs nahezu exponentielles Wachstum, gegen Ende quasi begrenztes Wachstum.
S-förmige Wachstumskurve: Wendepunkt bei Erreichen von $f(t) = \frac{1}{2} \cdot S$ bzw. bei
$t_W = \frac{\ln\left(\frac{S}{f(0)} - 1\right)}{k \cdot S}$; dort ist die Ableitung maximal. Es gilt zudem: $k \overset{\text{DGL}}{=} \frac{f'(0)}{f(0) \cdot (S - f(0))} > 0$.
GTR_{TI-83}: STAT – EDIT ➜ *Liste eingeben* ➜ STAT – CALC –B: Logistic [L1] {= 2nd+1} [,] [L2] {= 2nd+2}: Logistische Regression mit a, b, c (wie oben angegeben) von entsprechend vorgegebenen Daten.

1) Exponentielles Wachstum	2) Begrenztes Wachstum	3) Logistisches Wachstum

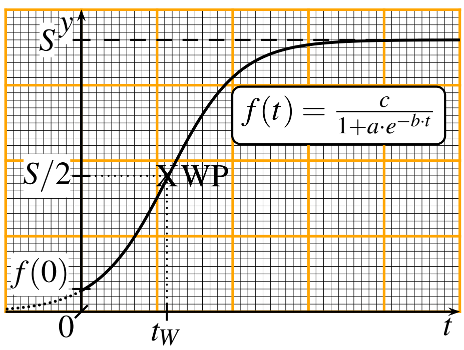
i) exponentielle Zunahme



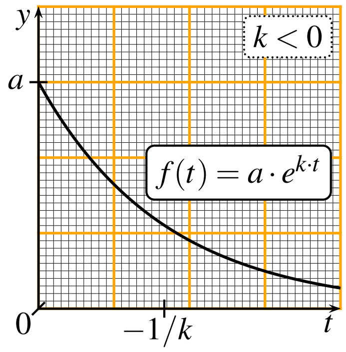
i) begrenzter Zuwachs



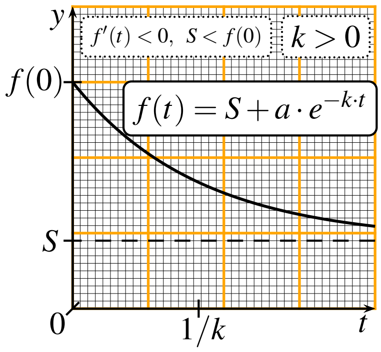
i) logistisches Wachstum



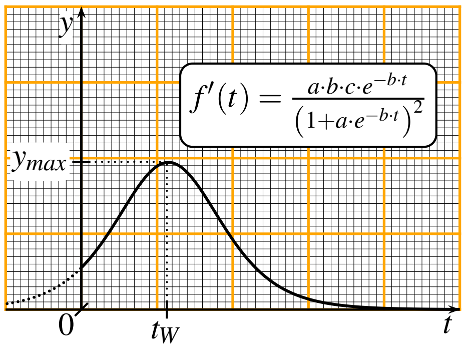
ii) exponentielle Abnahme



ii) begrenzte Abnahme



ii) Änderungsrate logist. Wachstum



Vorsicht: Ich habe mich um eine möglichst konsistente Darstellung bemüht, die am Lehrbuch ('Elemente der Mathematik', Schroedel) orientiert ist – in der Formelsammlung werden andere Buchstaben verwendet.