Mathematik

Prozentrechnung (und Promillerechnung)

G: Grundwert ('das Ganze'); P: Prozentwert ('Anteil'; pro centum – von hundert); p: Prozentsatz/Prozentzahl; damit gilt: $p\% = \frac{P}{G} \cdot 100\%$; $P = \frac{G \cdot p}{100}$; $G = \frac{P \cdot 100}{p}$ [Promille: $\check{p}‰ = \frac{P}{G} \cdot 1000‰$; $P = \frac{G \cdot \check{p}}{1000}$; $G = \frac{P \cdot 1000}{\check{p}}$].

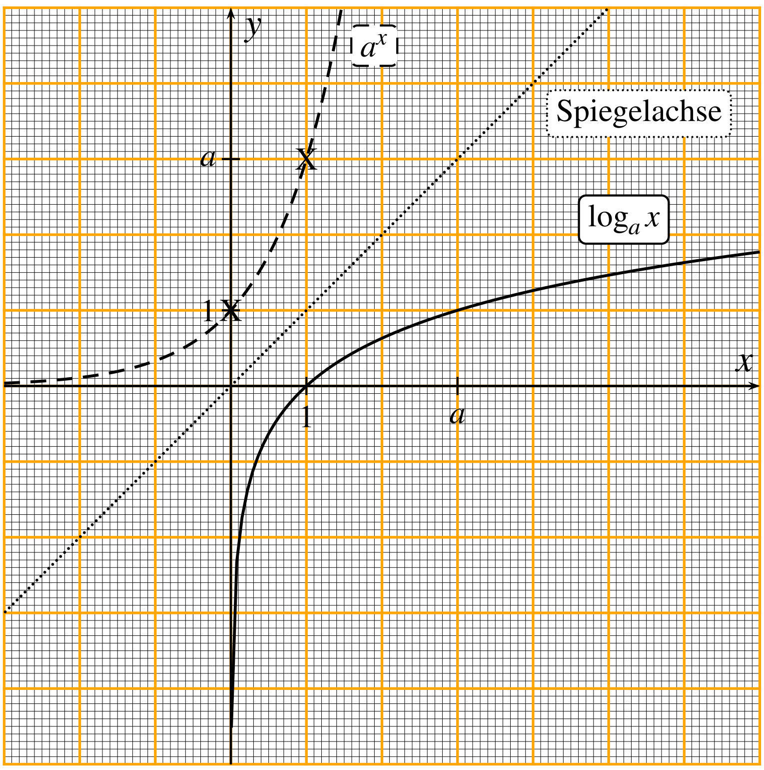
Für exponentielles Wachstum bzw. exponentielle Abnahme mit Angaben über Prozentzahlen gilt:

Wachstumsfaktor: $q = 1 + \frac{p}{100}$, d.h. 4% Wachstum bedeutet $q = 1{,}04$ $\left(\text{bzw. } q = 1 + \frac{\check{p}}{1000}\right)$.

Abnahmefaktor: $\tilde{q} = 1 - \frac{p}{100}$, d.h. 4% Abnahme bedeutet $\tilde{q} = 0{,}96$ $\left(\text{bzw. } \tilde{q} = 1 - \frac{\check{p}}{1000}\right)$.

Logarithmus

Zum Nachvollziehen (nicht lernen – kommt in einer höheren Stufe ausführlicher):



Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion:

$f(x) = a^x$

$f^{-1}(x) = \log_a(x)$

"Logarithmus von x zur Basis a"

Es gilt:

$\log_a(a^x) = x$ sowie $a^{\log_a(x)} = x$

$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$ [*]

$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$

$\log_a(b) \cdot \log_b(c) = \log_a(c)$

$\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$

$\lg(x) := \log_{10}(x)$

"dekadischer Logarithmus" oder 'Zehnerlogarithmus'

$\ln(x) := \log_e(x)$ $\{e = 2{,}718\ldots\}$

"logarithmus naturalis" oder 'natürlicher Logarithmus' [11. Klasse]

$\mathrm{lb}(x) := \log_2(x)$

"logarithmus dualis" oder 'binärer Logarithmus' bzw. 'Zweierlogarithmus'

$$\underline{a^x = b} \;\mid\; \lg \quad \Rightarrow \quad \lg(a^x) = \lg(b) \overset{[*]}{\Rightarrow} x \cdot \lg(a) = \lg(b) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\lg(b)}{\lg(a)}}$$

Häufige Anwendung: [1. exponentielles Wachstum: $q > 1$; 2. exponentielle Abnahme: $0 < \tilde{q} < 1$]

1. Verdopplungszeit t_D bzw. T_2: $q^{t_D} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{t_D} = 2 \Rightarrow \boxed{t_D = \frac{\lg(2)}{\lg\left(1 + \frac{p}{100}\right)} = \frac{\lg(2)}{\lg(q)}}$.

2. Halbierungszeit/Halbwertszeit t_H bzw. $T_{1/2}$: $\tilde{q}^{t_H} = \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{t_H} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{t_H = \frac{\lg(1/2)}{\lg\left(1 - \frac{p}{100}\right)} = \frac{\lg(0{,}5)}{\lg(\tilde{q})}}$.