Mathematik

Folgen, Reihen und Grenzwert

❍ Definition einer **Folge**:
Eine **Folge** ist eine **Funktion**, bei der jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zugeordnet wird. Die Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4, … heißen die Folgenglieder, $n \in \mathbb{N}$ heißt Index (oder Platznummer des Folgengliedes a_n).

Eine **Folge** ist klar bestimmt über:

1) Nennung der ersten Folgenglieder (man muss dabei genügend Glieder angeben, so dass es eindeutig ist; vgl. Aufgabe LB S. 12, Nr. 5); dies kann als Menge ($\{2,4,6,8,...\}$) oder auch als Graph oder Tabelle erfolgen. [Den Zusammenhang Graph und Folge (bzw. Funktion) weist Aufgabe LB S. 13, Nr. 8 aus.]
2) Rekursive Form: Zweiteilig – a) Rekursionsformel, die das Nachfolgeglied über das vorausgehende Glied bestimmt (die Änderung von Folgeglied zum nachfolgenden Folgeglied wird klar ausgewiesen), b) Nennung des 1. Gliedes der Folge.
3) Explizite Form: Eine Formel $a_n \equiv a(n) = \ldots$ (Formel für das n. Folgeglied, d.h. n gibt die Position an; n wird auch Index {oder Platznummer} genannt). Ein beliebig spätes Folgeglied lässt sich hiermit sofort bestimmen.

Diese drei Darstellungen sind vollständig und können jeweils ineinander überführt werden [vgl. Aufgaben LB S. 12, Nr. 1, 2, 4].

Beispiel sei die Folge der ungeraden Zahlen:

1) Folgenglieder: 1, 3, 5, 7, 9, … .
2) Rekursive Form: a) $a_{n+1} = a_n + 2$; b) $a_1 = 1$.
3) Explizite Form: $a_n = 2 \cdot n - 1 = 1 + 2 \cdot (n-1)$.

Bemerkungen:

- $a_n \equiv a(n)$ bezeichnet zumeist das n-te Folgeglied und ebenso die gesamte Folge, letzteres wird ggf. mit '(a_n)' speziell ausgewiesen; da $f(x)$ eine Funktion wie auch den Wert $y = f(x)$ ausweist, ist dies eher übliches Vorgehen von Mathematikern, da hier keine Verwechslungsgefahr besteht – und unnötige Klammern weggelassen werden.
- Folgen sind immer auch Funktionen, weil hier jedes Element des Definitionsbereichs $\mathbb{D}$ **genau einem** Element des Wertebereichs $\mathbb{W}$ zugeordnet wird. Bei typischen Funktionen ist der Definitionsbereich zumeist ein kontinuierlicher Bereich, d.h. ein Intervall aus oder gleich ganz $\mathbb{R}$, während Folgen einen diskreten, aber unendlichen Definitionsbereich – zumeist Positionsnummer $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,4,...\}$ – besitzen. Neben diesem Gebrauch gibt es auch $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$ – wobei dann a_n das $(n+1)$-te Folgeglied wäre (es gibt noch weitere Änderungen!). Informatiker benutzen bei Schleifen zumeist als Start 0. Hier bleiben wir aber beim Start mit Index 1!

❍ Definition des **Grenzwertes:**
a heißt Grenzwert von Folge a_n, wenn es zu jedem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ eine Stelle n_ε gibt, ab der sich alle weiteren Folgeglieder um höchstens ε von a unterscheiden: $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$.
Wir schreiben kurz: $a_n \to a$ für $n \to \infty$, gelesen: a_n geht gegen a für n gegen unendlich, oder: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, gelesen: Limes von a_n für n gegen unendlich ist a.
Eine Folge, die einen Grenzwert hat, heißt konvergent und man sagt, sie strebt (von unten/oben/alternierend) gegen den Grenzwert; hat eine Folge keinen Grenzwert, nennt man sie divergent.

- **Grenzwertsätze:**
  Strebt die Folge a_n gegen die Zahl a und die Folge b_n gegen die Zahl b, so gelten die folgenden Sätze:

  1) Die Summe der Folgen konvergiert gegen die Summe der Grenzwerte:
     $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a+b.$
  2) Die Differenz der Folgen konvergiert gegen die Differenz der Grenzwerte:
     $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a-b.$
  3) Das Produkt der Folgen konvergiert gegen das Produkt der Grenzwerte:
     $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a\cdot b.$
  4) Der Quotient der Folgen konvergiert gegen den Quotienten der Grenzwerte:
     $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

- **Spezielle Folgen:**
  - **Konstante Folge:** jedes Glied a_i = a $\in \mathbb{R}$, rekursiv: $a_{n+1} = a_n + 0$ und $a_1 = a$, explizit: $a_n = a$.
  - **Arithmetische Folge:** additiver Zusatz, rekursiv: $a_{n+1} = a_n + d$, explizit: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = (a_1 - d) + n\cdot d,\ a \in \mathbb{R}$ (vgl. lineare Funktionen, Proportionalität) [vgl. Aufgabe LB S. 18, Nr. 7].
  - **Geometrische Folge:** multiplikativer Zusatz, rekursiv: $a_{n+1} = a_n \cdot q$, explizit: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{a_1}{q}\cdot q^n,\ a \in \mathbb{R}$, für 2. Darstellung: $q \neq 0$ (vgl. exponentielle Funktionen bzw. Wachstum) [vgl. Aufgabe LB S. 16, Nr. 2].
  - **Alternierende Folge:** hier wechseln Folgenglieder bzw. pendeln hin und her – typisch mit einem Faktor '$(-1)^n$' bzw. '$(-1)^{n+1}$' herbeigeführt.
  - **Nullfolge:** Folge, die gegen 0 strebt/konvergiert, also den Grenzwert 0 besitzt:
    $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. Über $a_n := a + z_n$, z_n: Nullfolge, lässt sich schnell eine Folge definieren, die gegen ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$ strebt. Beispiele für z_n: $0;\ \frac{1}{n};\ \frac{1}{n^2};\ 2^{-n};\ (-1)^n\cdot\frac{1}{n};\ \sqrt[n]{5}-1.$

- **Reihen:**
  Präzise wird eine Reihe s_n als eine Folge definiert, deren Glieder die Teilsummen (Partialsummen) einer anderen Folge a_n sind: $s_n := \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \equiv a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$
  - **Geometrische Reihe**: eine auf einer geometrischen Folge basierende Reihe, wobei für die Partialsumme gilt: $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_1\cdot q^{i-1} = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, für $q \neq 1$.
  - Für $q \in\,]-1;1[$ $\{$d.h. $-1 < q < 1$ bzw. $|q| < 1\}$ ist eine geometrische Reihe **konvergent** mit dem Grenzwert $s = \frac{a_1}{1-q}$, ansonsten ist eine geometrische Reihe **divergent**.

LB – eingeführtes Lehrbuch:

a) "**Elemente der Mathematik**", Analysis, Rheinland-Pfalz, Grundfach, Schroedel/Westermann, ISBN 978-3-507-88410-6, 2019 (Druck A), 244 S. (geb.), hieraus 1. Kapitel, S. 9 – 28;

b) "**Elemente der Mathematik**", Analysis, Rheinland-Pfalz, Leistungsfach, Schroedel/Westermann, ISBN 978-3-507-88422-9, 2017 (Druck A), 374 S. (geb.), hieraus 1. Kapitel, S. 9 – 26+39f.