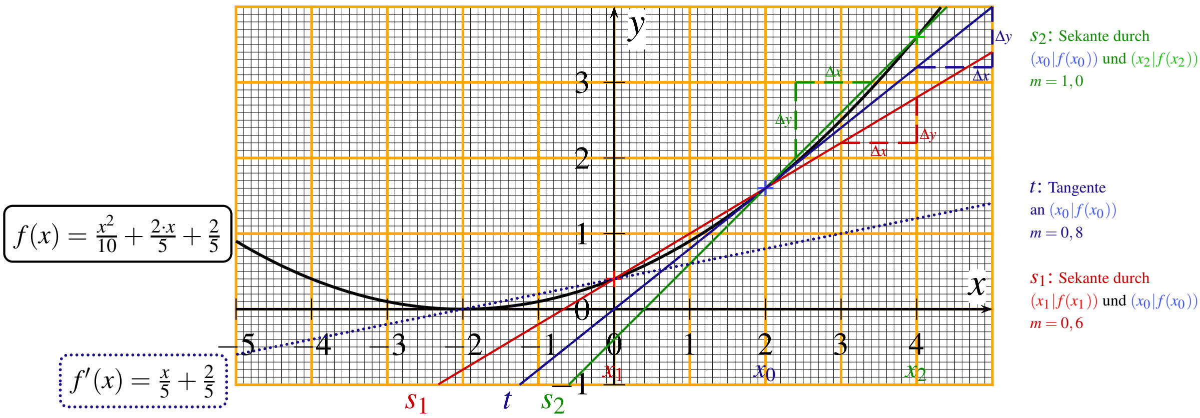
Mathematik

Einführung in die Infinitesimalrechnung

Die Infinitesimalrechnung ist eine von Gottfried Wilhelm Leibniz und Isaac Newton unabhängig voneinander gegen Ende des 17. Jahrhunderts entwickelte Technik [als Wegbereiter wären noch René Descartes und Bonaventura Cavalieri zu nennen], um Differential- und Integralrechnung zu betreiben. Sie liefert eine Methode, eine Funktion auf beliebig kleinen (d.h. infinitesimalen) Abschnitten widerspruchsfrei zu beschreiben, wobei die gesamte Analysis dann im 19. Jahrhundert auf ein solideres Fundament gestellt wurde.
Heute wird dies über Grenzwertprozesse eingeführt, bei der die Differenz (h) zwischen einem Element des Wertebereichs (x_0) und einem Vergleichselement (x_i bzw. $x = x_0 + h$) gegen Null strebt.

I. Ableiten (Differenzieren)

Hierbei werden Änderungsraten auf Grund des Bestands (z.B. Geschwindigkeiten bei einem Zeit-Weg-Diagramm) bzw. Tangentensteigungen an einem Punkt eines Graphen einer Funktion bestimmt.



Fallunterscheidung:

i) $x_1 < x_0$ bzw. $x < x_0$ bzw. $h < 0$ bzw. würde zum ‘linksseitigen Limes’:

Steigung einer linearen Funktion: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{-(f(x_1) - f(x_0))}{-(x_1 - x_0)} = \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{\text{Differenzenquotient}}$

ii) $x_2 > x_0$ bzw. $x > x_0$ bzw. $h > 0$ bzw. würde zum ‘rechtsseitigen Limes’:

Steigung einer linearen Funktion: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}}_{\text{Differenzenquotient}} = \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}}_{\text{Differenzenquotient}} = \tan(\alpha)$ (α: Steigungswinkel).

Auch ‘durchschnittliche Änderungsrate von f über $[x_0; (x_0 + h)]$’ genannt.

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\text{Tangente}} = \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{Differentialquotient}} = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}}_{\text{Differentialquotient}}$$: ‘lokale Änderungsrate von f an der Stelle x_0’.

Wenn beide Grenzwerte, linksseitig und rechtsseitig, existieren und übereinstimmen, existiert die erste Ableitung an der Stelle x_0 und ist gleich dem Grenzwert: $f'(x_0)$ [d.h. $f(x)$ muss stetig sein, darf also keine Sprünge oder Defintionslücken aufweisen].

Da man graphisch nicht auf 3 Stellen genau die Steigung der Tangente bestimmen kann, ist algebraisch (Berechnen von Hand über Ableitungsfunktion) bzw. numerisch (mit WTR, GTR oder CAS) zu bevorzugen.

Nun wird an drei einfachen Beispielen gezeigt, wie man von der Funktionsgleichung über den obigen Grenzwertprozess zur Ableitungsfunktion kommen kann (da $x_0 \in \mathbb{D}_f$ beliebig wählbar ist).

1) Lineare Funkion ['Gerade'; $f(x) = a \cdot x + b$]:

$$m = \frac{a \cdot x + b - a \cdot x_0 - b}{x - x_0} = \frac{a \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = a, \quad x \neq x_0;$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{a \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = a.$$

2) Quadratische Funktion ['Parabel'; $f(x) = a \cdot x^2$]:

$$m = \frac{a \cdot (x^2 - {x_0}^2)}{x - x_0} \overset{3.\,\mathrm{BF}}{=} \frac{a \cdot (x - x_0) \cdot (x + x_0)}{x - x_0} = a \cdot (x + x_0), \quad x \neq x_0;$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{a \cdot (x - x_0) \cdot (x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} a \cdot (x + x_0) = 2 \cdot a \cdot x_0.$$

3) Kubische Funktion [$f(x) = a \cdot x^3$; unter Verwendung von $(*)$: $x = (x_0 + h)$]:

$$m = \frac{a \cdot x^3 - a \cdot {x_0}^3}{x - x_0} \overset{(*)}{=} a \cdot \frac{(x_0 + h)^3 - {x_0}^3}{x_0 + h - x_0} \overset{2.\,\mathrm{BF}}{=} a \cdot \frac{({x_0}^2 + 2 \cdot h \cdot x_0 + h^2) \cdot (x_0 + h) - {x_0}^3}{h} = a \cdot \frac{\cancel{{x_0}^3} + 2 \cdot h \cdot {x_0}^2 + h^2 \cdot x_0 + h \cdot {x_0}^2 + 2 \cdot h^2 \cdot x_0 + h^3 \cancel{- {x_0}^3}}{h} =$$

$$= a \cdot \frac{3 \cdot h \cdot {x_0}^2 + 3 \cdot h^2 \cdot x_0 + h^3}{h} = a \cdot (3 \cdot {x_0}^2 + 3 \cdot h \cdot x_0 + h^2);$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \left(a \cdot (3 \cdot {x_0}^2 + 3 \cdot h \cdot x_0 + h^2)\right) = 3 \cdot a \cdot {x_0}^2.$$

Mit diesen einfachen Beispielen zeichnet sich ab, dass Konstanten (Terme ohne Variable) nichts zur Ableitung beitragen und durch das Differenzieren vernichtet werden, dass bei Potenzen der Variable deren Exponenten um eins vermindert werden und zudem der alte Koeffizient (auch Vorfaktor genannt) mit dem ursprünglichen Exponenten der Variablen multipliziert den neuen Koeffizienten der (wie gesagt um eins verminderten) Potenz der Variablen darstellt. Dies wird mit den folgenden Ableitungsregeln und den ganzrationaler Funktionen weiter vertieft.

Ableitungsregeln

1. Konstante Funktion:
Die konstante Funktion $f(x) = a,\ x, a \in \mathbb{R}$, ist überall differenzierbar mit Funktionswert 0, d.h. $f'(x) = 0$.

2. Faktorregel:
Die Ableitung einer reellen Zahl multipliziert mit einer Funktion ist die Zahl multipliziert mir der Ableitung der Funktion: $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$.

3. Potenzregel:
Ist f eine Potenzfunktion $f(x) = x^n,\ x, n \in \mathbb{R}$, so gilt: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

4. Summenregel:
Sind $f(x)$ und $g(x)$ auf einem Intervall I differenzierbar, so ist auch die Summe der Funktionen f und g in I differenzierbar mit: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$.

5. Produktregel:
Sind $f(x)$ und $g(x)$ auf einem Intervall I differenzierbar, so ist auch das Produkt der Funktionen f und g in I differenzierbar mit: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

6. Quotientenregel:
Sind $f(x)$ und $g(x)$ auf einem Intervall I differenzierbar, so ist auch der Quotient der Funktionen f und g in I differenzierbar, solange $g(x) \neq 0$ gilt, mit: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

7. Reziprokenregel (simple Anwendung der Quotientenregel):
Der Kehrwert der auf einem Intervall I differenzierbaren Funktion $f(x)$ ist an allen Stellen von I mit $f(x) \neq 0$ differenzierbar mit: $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$.

8. Kettenregel:
Sei Funktion $y = g(x)$ im Intervall I_1 differenzierbar, die Funktion $z = f(y)$ im Intervall $I_2 = g(I_1)$ differenzierbar, so ist auch die verkettete Funktion $(f \circ g)$ in I_1 differenzierbar mit:
$(f \circ g)'(x) \equiv (f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (d.h. äußere Ableitung mal innere Ableitung) bzw. $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (Differentialoperatoren).

II. Integrieren

Hierbei wird der Bestand auf Grund von Änderungsraten bestimmt bzw. Flächen bzw. Volumina auf Grund des Randes bzw. der Fläche, die diese begrenzen, berechnet. Differenzieren und Integrieren sind Umkehroperationen, ähnlich wie Quadrieren und Wurzelziehen.
Man sagt, bezogen auf ganzrationale Funktionen, dass Differenzierung vereinfacht bzw. glätttet, Integrieren macht komplizierter bzw. raut auf.

... Please hold the Line! ... ... Hier geht es bald weiter! ...

LB – eingeführtes Lehrbuch:

a) "**Elemente der Mathematik**", Analysis, Rheinland-Pfalz, Grundfach, Schroedel/Westermann, ISBN 978-3-507-88410-6, 2019 (Druck A), 244 S. (geb.), hieraus 2. Kapitel, S. 29 – 74, und 4. Kapitel, S. 155 – 196;

b) "**Elemente der Mathematik**", Analysis, Rheinland-Pfalz, Leistungsfach, Schroedel/Westermann, ISBN 978-3-507-88422-9, 2017 (Druck A), 374 S. (geb.), hieraus 2. Kapitel, S. 43 – 98, und 4. Kapitel, S. 195 – 252.

Weitere Quellen:

i) `https://de.wikipedia.org/wiki/Infinitesimalrechnung`

ii) `https://de.wikipedia.org/wiki/Differentialrechnung`

iii) `https://de.wikipedia.org/wiki/Integralrechnung`