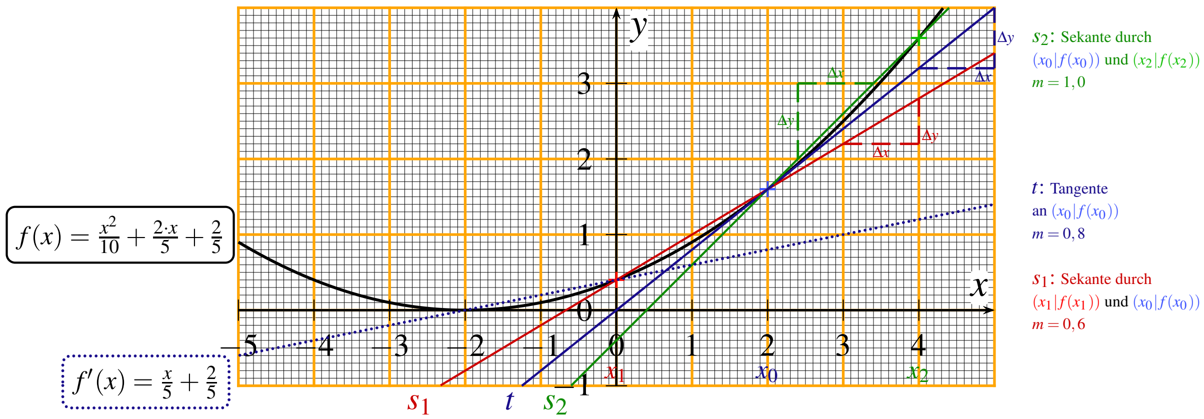
Mathematik

Einführung in die Infinitesimalrechnung

Die **Infinitesimalrechnung** ist eine von Gottfried Wilhelm Leibniz und Isaac Newton unabhängig voneinander gegen Ende des 17. Jahrhunderts entwickelte Technik [als Wegbereiter wären noch René Descartes und Bonaventura Cavalieri zu nennen], um **Differential-** und **Integralrechnung** zu betreiben. Sie liefert eine Methode, eine Funktion auf beliebig kleinen (d.h. infinitesimalen) Abschnitten widerspruchsfrei zu beschreiben, wobei die gesamte Analysis dann im 19. Jahrhundert auf ein solideres Fundament gestellt wurde.
Heute wird dies über Grenzwertprozesse eingeführt, bei der die Differenz (h) zwischen einem Element des Wertebereichs (x_0) und einem Vergleichselement (x_i bzw. $x = x_0 + h$) gegen Null strebt.

I. Ableiten (Differenzieren)

Auf Grund des **Bestands** werden hierbei **Änderungsraten** (z.B. Geschwindigkeiten bei einem Zeit-Weg-Diagramm) bzw. Tangentensteigungen an einem Punkt eines Graphen einer Funktion bestimmt.



Fallunterscheidung:

i) $x_1 < x_0$ bzw. $x < x_0$ bzw. $h < 0$ bzw. würde zum 'linksseitigen Limes':

Steigung einer linearen Funktion: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{-(f(x_1) - f(x_0))}{-(x_1 - x_0)} = \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{\text{Differenzenquotient}}$

ii) $x_2 > x_0$ bzw. $x > x_0$ bzw. $h > 0$ bzw. würde zum 'rechtsseitigen Limes':

Steigung einer linearen Funktion: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}}_{\text{Differenzenquotient}} = \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}}_{\text{Differenzenquotient}} = \tan(\alpha)$ (α: Steigungswinkel).

Auch 'durchschnittliche Änderungsrate von f über $[x_0; (x_0 + h)]$' genannt.

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\text{Tangente}} = \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{Differentialquotient}} = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0}}_{\text{Differentialquotient}}$$: 'lokale Änderungsrate von f an der Stelle x_0'.

Wenn beide Grenzwerte, linksseitig und rechtsseitig, existieren und übereinstimmen, existiert die erste Ableitung an der Stelle x_0 und ist gleich dem Grenzwert: $f'(x_0)$ [d.h. $f(x)$ muss stetig sein, darf also keine Sprünge oder Defintionslücken aufweisen].

Da man graphisch nicht auf 3 Stellen genau die Steigung der Tangente bestimmen kann, ist algebraisch (Berechnen von Hand über Ableitungsfunktion) bzw. numerisch (mit WTR, GTR oder CAS) zu bevorzugen.

Nun wird an drei einfachen Beispielen gezeigt, wie man von der Funktionsgleichung über den obigen Grenzwertprozess zur Ableitungsfunktion kommen kann (da $x_0 \in \mathbb{D}_f$ beliebig wählbar ist).

1) Lineare Funkion [‘Gerade’; $f(x) = a \cdot x + b$]:

$$m = \frac{a \cdot x + b - a \cdot x_0 - b}{x - x_0} = \frac{a \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = a, \quad x \neq x_0;$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{a \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = a.$$

2) Quadratische Funktion [‘Parabel’; $f(x) = a \cdot x^2$]:

$$m = \frac{a \cdot (x^2 - {x_0}^2)}{x - x_0} \overset{3.\,\mathrm{BF}}{=} \frac{a \cdot (x - x_0) \cdot (x + x_0)}{x - x_0} = a \cdot (x + x_0), \quad x \neq x_0;$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{a \cdot (x - x_0) \cdot (x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} a \cdot (x + x_0) = 2 \cdot a \cdot x_0.$$

3) Kubische Funktion [$f(x) = a \cdot x^3$; unter Verwendung von $(*)$: $x = (x_0 + h)$]:

$$m = \frac{a \cdot x^3 - a \cdot {x_0}^3}{x - x_0} \overset{(*)}{=} a \cdot \frac{(x_0 + h)^3 - {x_0}^3}{x_0 + h - x_0} \overset{2.\,\mathrm{BF}}{=} a \cdot \frac{({x_0}^2 + 2 \cdot h \cdot x_0 + h^2) \cdot (x_0 + h) - {x_0}^3}{h} = a \cdot \frac{\cancel{{x_0}^3} + 2 \cdot h \cdot {x_0}^2 + h^2 \cdot x_0 + h \cdot {x_0}^2 + 2 \cdot h^2 \cdot x_0 + h^3 \cancel{- {x_0}^3}}{h} =$$

$$= a \cdot \frac{3 \cdot h \cdot {x_0}^2 + 3 \cdot h^2 \cdot x_0 + h^3}{h} = a \cdot (3 \cdot {x_0}^2 + 3 \cdot h \cdot x_0 + h^2);$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \left(a \cdot (3 \cdot {x_0}^2 + 3 \cdot h \cdot x_0 + h^2) \right) = 3 \cdot a \cdot {x_0}^2.$$

Mit diesen einfachen Beispielen zeichnet sich ab, dass Konstanten (Terme ohne Variable) nichts zur Ableitung beitragen und durch das Differenzieren vernichtet werden, dass bei Potenzen der Variable deren Exponenten um eins vermindert werden und zudem der alte Koeffizient (auch Vorfaktor genannt) mit dem ursprünglichen Exponenten der Variablen multipliziert den neuen Koeffizienten der (wie gesagt um eins verminderten) Potenz der Variablen darstellt. Dies wird mit den folgenden Ableitungsregeln und den ganzrationaler Funktionen weiter vertieft.

Ableitungsregeln

0. Vereinfachen: Ausmultiplizieren [DG, 1.-3. BF], Sortieren nach Potenz der Variablen, Zusammenfassen additiver Glieder & Vorfaktoren.
1. Konstante Funktion: $f(x) = a$, $x, a \in \mathbb{R}$, ist überall differenzierbar mit Funktionswert 0, d.h. $f'(x) = 0$.
2. Ableitung von x: Die Funktion $f(x) = x$ hat die Ableitung $f'(x) = 1$ (keine Definitionslücke bei 0).
3. Faktorregel: Die Ableitung einer reellen Zahl multipliziert mit einer Funktion ist die Zahl multipliziert mit der Ableitung der Funktion: $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$.
4. Potenzregel: Ist f eine Potenzfunktion $f(x) = x^n$, $x, n \in \mathbb{R}$, so gilt: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.
5. Summenregel: Sind $f(x)$ und $g(x)$ auf einem Intervall I differenzierbar, so ist auch die Summe der Funktionen f und g in I differenzierbar mit: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$.

➥ Diese 1+5 Regeln genügen, um jede ganzrationale Funktion abzuleiten ❣

6. Produktregel: Sind $f(x)$ und $g(x)$ auf einem Intervall I differenzierbar, so ist auch das Produkt der Funktionen f und g in I differenzierbar mit: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
7. Quotientenregel: Sind $f(x)$ und $g(x)$ auf einem Intervall I differenzierbar, so ist auch der Quotient der Funktionen f und g in I differenzierbar, solange $g(x) \neq 0$ gilt, mit: $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.
8. Reziprokenregel (simple Anwendung der Quotientenregel): Der Kehrwert der auf einem Intervall I differenzierbaren Funktion $f(x)$ ist an allen Stellen von I mit $f(x) \neq 0$ differenzierbar mit: $\left(\frac{1}{f(x)} \right)' = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$.
9. Kettenregel: Sei Funktion $y = g(x)$ im Intervall I_1 differenzierbar, die Funktion $z = f(y)$ im Intervall $I_2 = g(I_1)$ differenzierbar, so ist auch die verkettete Funktion $(f \circ g)$ in I_1 differenzierbar mit: $(f \circ g)'(x) \equiv f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (d.h. äußere Ableitung mal innere Ableitung) bzw. $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (Differentialoperatoren).
10. Ableitung spezieller Funktionen: $(\sin(x))' = \cos(x)$; $(\cos(x))' = -\sin(x)$; $(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$; $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$; $(e^x)' = e^x$; $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$; $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$.

II. Brückenschlag zwischen
Differentialrechnung (Ableiten) und Integralrechnung (Integrieren)

Differenzieren und **Integrieren** sind Umkehroperationen, ähnlich wie Quadrieren und Wurzelziehen.
Da beim Ableiten Konstanten vernichtet werden (d.h. das konstante Glied wird 0; anders gesagt der Informationsgehalt wird geringer), benötigt das Integrieren eine Randbedingung, um die fehlende Information zu ersetzen, d.h. die Integrationskonstante zu bestimmen.
Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades $f(x)$ wird durch $(n+1)\times$-Ableiten zur konstanten Funktion $y = f^{(n+1)}(x) = 0$.
Die beiden gegensätzlichen Vorgänge Ableiten und Integrieren haben drei wesentliche Aspekte:
1) **Funktional**e Bedeutung (bei Herleitung und Beweis und der Verankerung in der Analysis zur Kurvendiskussion):
Beide Vorgänge sind Grenzwertprozesse, d.h. immer kleinere Größen streben gegen 0 – und somit erhalten wir beim **Ableiten** die Tangente als Steigung im Punkt einer Kurve (als Steigung von links und von rechts in einem Punkt – existieren beide und sind gleich, ist die zu untersuchende Funktion an dieser Stelle **ableitbar/differenzierbar**) bzw. beim **Integrieren** die Fläche unter einer Kurve für ein gegebenes Intervall des Definitionsbereichs (als Untersummen und Obersummen – haben beide einen identischen Grenzwert, ist die zu untersuchende Funktion **integrierbar**).
Infinitesimal werden die Distanz der beiden Punkte der Sekantensteigung, die im Grenzwertprozess zur Tangentensteigung werden, wie auch die Breiten der Flächen, die die Kurve immer darunter bleiben bzw. überragen oder berühren und im Grenzwertprozess die Flächengröße ergeben.
Wenn man nun bei ganzrationalen Funktionen durch **Ableiten** von der Funktion ($f(x)$) zur Ableitungsfunktion ($f'(x)$) kommt, so hat letztere eine Nullstelle (von den maximal möglichen Nullstellen) weniger, eine Extremstelle weniger sowie eine Wendestelle weniger als die Ursprungsfunktion. Wenn man entsprechend durch **Integrieren** von der Funktion ($f(x)$) zu deren Stammfunktion ($F(x)$) kommt, wird letztere eine mögliche Nullstelle, eine Extremstelle und eine Wendestelle mehr aufweisen. Man sagt, bezogen auf ganzrationale Funktionen, dass **Differenzierung** vereinfacht bzw. '*glättet*', **Integrieren** macht komplizierter bzw. '*rauht auf*'.
2) **Geometrisch**e Bedeutung (als Deutung mit bekanntem Wissen):
Geometrisch kommt man durch **Ableiten** von der Fläche zum Rand, z.B. Kreis $A_{\text{Kr}} = \pi \cdot r^2$ zum Umfang $U = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$ ('π *mal Daumen*') bzw. vom Volumen zur Hülle, z.B. vom Kugelvolumen $V_{\text{Kug}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ zur Sphäre $A_{\text{Kug}} = 4 \cdot pi \cdot r^2$ ('*Bedächtig kommt einher geschritten: vier Drittel* π *mal r zur Dritten. Und was sie auf dem Rücken hat, ist 4* π *r Quadrat.*' oder '*Was kugelt da an mir vorbei? Vier Drittel pi mal r hoch drei!*').
Integrieren vollzieht die andere Richtung (vom Rand zur Fläche bzw. zur Flächenhülle zum Volumen).
3) **Wechselspiel** von **Änderung** und **Bestand** (typisch in mehr oder weniger lebensweltlichen Beispielen und Abstraktionen):
Ableiten führt vom **Bestand zur Änderung** (z.B. von der Wegstrecke zur Geschwindigkeit), wohingegen **Integrieren** von der **Änderung zum Bestand** (z.B. vom Zufluss eines Sees zu dessen Wassermenge) führt.

LB – eingeführtes Lehrbuch:
a) "**Elemente der Mathematik**", Analysis, Rheinland-Pfalz, Grundfach, Schroedel/Westermann, ISBN 978-3-507-88410-6, 2019 (Druck A), 244 S. (geb.), hieraus 2. Kapitel, S. 29 – 74, und 4. Kapitel, S. 155 – 196;
b) "**Elemente der Mathematik**", Analysis, Rheinland-Pfalz, Leistungsfach, Schroedel/Westermann, ISBN 978-3-507-88422-9, 2017 (Druck A), 374 S. (geb.), hieraus 2. Kapitel, S. 43 – 98, und 4. Kapitel, S. 195 – 252.
Weitere Quellen:
i) `https://de.wikipedia.org/wiki/Infinitesimalrechnung`
ii) `https://de.wikipedia.org/wiki/Differentialrechnung`
iii) `https://de.wikipedia.org/wiki/Integralrechnung`

III. Integrieren

Hierbei wird auf Grund von **Änderungsraten** der **Bestand** bestimmt bzw. auf Grund des **Randes** eine **Fläche** oder auf Grund der **umhüllenden Fläche** ein **Volumen** berechnet (d.h. auf Grund einer **Begrenzung** das **Innere** bestimmt).

Das bestimmte Integral ist die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion $f(x)$, d.h. $\mathbb{G}_f$, und der x-Achse (y-Bereich) sowie zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ {mit $a < b$ und $a, b \in \mathbb{R}$: wobei b als oberere Grenze des Integrals und a als untere Grenze des Integrals bezeichnet wird – ein solches Integral heißt bestimmtes Integral: $\int\limits_a^b \ldots \,\mathrm{d}x$} ($x$-Bereich).

Ähnlich wie beim Grenzwertprozess von Sekanten- zur Tangentensteigung bildet man hier einen Grenzwert für immer feinere Breiten von Rechtecken (früher als infinitesimale Breiten 'dx' bezeichnet), die man als Obersumme gerade vollständig überdecken lässt bzw. im Fall der Untersummen maximal einbeschreibt.

Teilt man das Intervall $[a;b] \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ in n Teilintervalle ein (z.B. $n = 10$), so gilt für diese Intervalle: $I_i = \left[a + \left(\frac{b-a}{n}\right) \cdot (i-1); a + \left(\frac{b-a}{n}\right) \cdot i\right]$ für alle $i \in [1;n] \subset \mathbb{N}$.

Nun betrachten wir die drei Flächen A: exakte Fläche, O: Fläche der Obersummen und U: Fläche der Untersummen, so dass gelten muss: $O \geq A \geq U$ mit $O_n = \Sigma_{i=1}^n \frac{b-a}{n} \cdot \max\limits_{x \in I_i} f(x)$ und $U_n = \Sigma_{i=1}^n \frac{b-a}{n} \cdot \min\limits_{x \in I_i} f(x)$.

Dies entspricht den Sekantensteigungen – nun kommt der Grenzwertprozess:
Gilt $\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} U_n$, d.h. dass die Obersummen und Untersummen beide den selben Grenzwert besitzen, so sagen wir, dass die Funktion $f(x)$ integrabel ist und der Grenzwert ist die Fläche $A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Das Integralzeichen ist die stilisierte Summe beim Grenzwertprozess von unendlich vielen unendlich schmalen Rechtecken, deren Breite durch dx symbolisiert wird.

... Please hold the Line! ... ... Hier geht es bald weiter! ...

Definition und Satz zu Stammfunktionen

Eine Funktion $F(x)$ heißt Stammfunktion einer Funktion $f(x)$, wenn gilt: $F'(x) = f(x)$, d.h. F und f haben denselben Definitionsbereich $\mathbb{D}$ und F ist dort differenzierbar.

Ist $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ über dem Intervall $[a;b]$, so sind alle Stammfunktionen von $f(x)$ über dem Intervall $[a;b]$ gegeben durch $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ (unbestimmtes Integral).

Haupsatz der Differential und Integralrechnung

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[a;b]$, so gilt: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Für die Differenz der Stammfunktionswerte schreibt man auch kurz: $F(x)\Big|_a^b \equiv [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

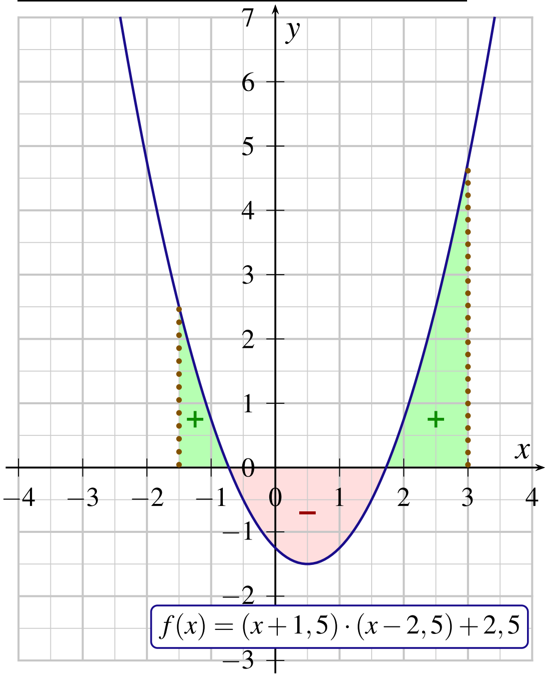
Mittelwertsatz der Integralrechnung

$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\cdot f(c)$ mit $a < c < b$, wenn $f(x)$ stetig auf $[a,b]$ ist.

Integrationsregeln

1. $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ (Gleichheit der Integrationsgrenzen);
2. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ 'Intervallregel';
3. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ 'Vertauschungsregel' (Integralgrenzen);
4. $\int\limits_a^b k\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k\cdot\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 'Faktorregel' (Homogenität);
5. $\int\limits_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 'Summenregel' (Additivität) [bzw. 4.+5.: Linearität];
6. $\int\limits_a^b (f'(x)\cdot g(x))\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int\limits_a^b (f(x)\cdot g'(x))\,\mathrm{d}x$ 'Produktintegration';
7. $\int\limits_a^b f(g(z))\cdot g'(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$ 'Substitution' (mit $x = g(z)$, $g'(z) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$).

Geometrisch motiviertes Beispiel



Am Beispiel der Funktion $f(x) = x^2 - x - \frac{5}{4}$ mit $\mathbb{G}_f$ links soll die Vorstellung entwickelt und Lösungsstrategien zur Flächenbestimmung eingeübt werden:
1. die Orientierung der Integralfläche zwischen Graph und x-Achse (y-Bereich) und zwischen unterer Grenze $a = -1,5$ und oberer Grenze $b = 3$ (x-Bereich),
2. das Vorgehens zur Bestimmung der geometrischen Fläche über zusätzliche Grenzen der Nullstellen (hier über p-q-Formel: $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$ bzw. $x_1 \approx -0,725$ und $x_2 \approx 1,725$ und Summe der Beträge),
3. der Abschätzung der Fläche unter einer Kurve durch Kästchenzählen (letzteres kam im freien Teil des Zentralabiturs 2016 in Bremen vor).

1. $F'(x) = f(x)$: $F(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{5}{4}\cdot x$;

$$\int\limits_{-1,5}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{-1,5}^{3} = F(3) - F(-1,5) = 1,125 = \tfrac{9}{8}.$$

2. $A = \left|\int\limits_{-1,5}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int\limits_{-x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int\limits_{-x_2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \approx$
$|0,89141| + |-2,44949| + |2,68308| \approx 6,02398.$

Im Prinzip wäre die Einheit 1 FE (Flächen-Einheit) entsprechend 4 KK (kleine Kästchen) bzw. 1 LE × 1 LE (Längen-Einheit) zu ergänzen.

3. Kästchenzählen als graphische Abschätzung (hier erst in KK, danach zum Vergleich mit 1. und 2. auch in FE-Angaben):
linke grüne Fläche: $\sim 3,5$ KK $\hat{\approx}$ 0,88 FE; rote Fläche: $\sim -9,5$ KK $\hat{\approx}$ 2,4 FE; rechte grüne Fläche: $\sim 10,5$ KK $\hat{\approx}$ 2,6 FE.