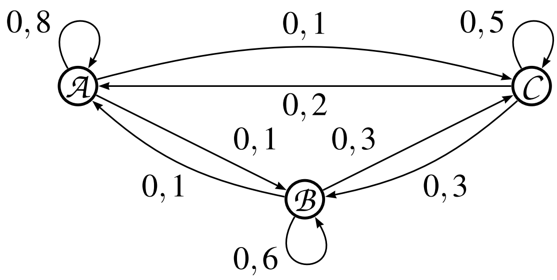
Mathematik

Käferwanderung (LB, S. 199, Nr. 12)

Erweiterte Aufgabenstellung:
In einem Naturschutzgebiet haben Wissenschaftler die Wanderbewegungen einer bestimmten Käferart beobachtet. Diese Tierart hält sich in drei Regionen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ des Gebiets auf. Die einzelnen Käfer wurden markiert, damit man das Wanderverhalten von Monat zu Monat relativ genau bestimmen kann. 80% der Käfer im Gebiet $\mathcal{A}$ bleiben dort, jeweils 10% wandern in Gebiet $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ ab. Von den Käfern in Gebiet $\mathcal{B}$ verbleiben 60% dort, 10% wandern nach $\mathcal{A}$ und 30% nach $\mathcal{C}$ ab. 20% der Tiere aus Gebiet $\mathcal{C}$ wechseln ins Gebiet $\mathcal{A}$, 30% ins Gebiet $\mathcal{B}$, während 50% das Gebiet nicht verlassen.

a) Zeichne den Übergangsgraphen.



b) Eine Zählung ergibt 300 Tiere im Gebiet $\mathcal{A}$, 700 im Gebiet $\mathcal{B}$ und 200 im Gebiet $\mathcal{C}$.
Berechne die Verteilung dieser Käferart in den nächsten drei Monaten.

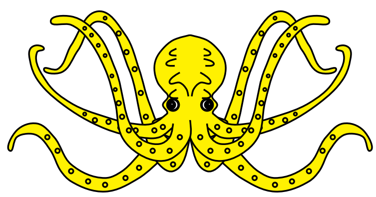
$$\text{Geg.: Übergangsmatrix } M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \mathcal{B} & \mathcal{C}\ \text{von/nach} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \\ \mathcal{C} \end{array};\ \text{Verteilung (bei } t=0 \text{ Monaten)}:\ \overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 300 \\ 700 \\ 200 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \mathcal{A} \\ \leftarrow \mathcal{B} \\ \leftarrow \mathcal{C} \end{array}.$$

[M heißt ***stochastische Matrix***, da: i) sie quadratisch ist, ii) $\sum\limits_i M_{ij} = 1$ (Spaltensummen) und iii) $M_{ij} \in [0;1]$ (rel. Häufigk./Wahrscheinlichkeiten).]

$$\overrightarrow{v_1} = M \cdot \overrightarrow{v_0} \overset{\text{GTR}}{=} \begin{pmatrix} 350 \\ 510 \\ 340 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{v_2} = M^2 \cdot \overrightarrow{v_0} = M \cdot \overrightarrow{v_1} \overset{\text{GTR}}{=} \begin{pmatrix} 399 \\ 443 \\ 358 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{v_3} = M^3 \cdot \overrightarrow{v_0} = M \cdot \overrightarrow{v_2} \overset{\text{GTR}}{=} \begin{pmatrix} 435,1 \\ 413,1 \\ 351,8 \end{pmatrix}.$$

[Siehe LB, S. 198, Kästen.]

Bitte Blatt umdrehen!



c) Ermittele die stabile Verteilung bzw. begründe, warum es diese im vorliegenden Fall nicht gibt.
i) Lösen eines Linearen Gleichungssystems (LGSs):

Für die stabile Verteilung gilt: $\vec{v_S} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M \cdot \vec{v_S}$; zudem gilt: Gesamtzahl der Käfer gleich 1200.

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0,8 \cdot a + 0,1 \cdot b + 0,2 \cdot c = 1 \cdot a \\ 0,1 \cdot a + 0,6 \cdot b + 0,3 \cdot c = 1 \cdot b \\ 0,1 \cdot a + 0,3 \cdot b + 0,5 \cdot c = 1 \cdot c \\ \quad a \quad + \quad b \quad + \quad c \quad = 1200 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} -0,2 \cdot a + & 0,1 \cdot b + & 0,2 \cdot c & = 0 \\ 0,1 \cdot a + & (-0,4) \cdot b + & 0,3 \cdot c & = 0 \\ 0,1 \cdot a + & 0,3 \cdot b + & (-0,5) \cdot c & = 0 \\ a + & b + & c & = 1200 \end{array} \right.$$

Bei exakt einer Lösung[①] lässt sich das LGS in eine Matrix umwandeln, die unser GTR von TI über `MATRX – MATH – B`[②] in die Dreiecksform umwandeln kann, so dass man die Lösungen für a, b und c und damit $\vec{v_S}$ direkt ablesen kann; in unserem speziellen Fall ergibt sich somit eine 4×4-Matrix:

$$\begin{pmatrix} -0,2 & 0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,3 & -0,5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1200 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{GTR: rref}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 507,692 \\ 0 & 1 & 0 & 369,230 \\ 0 & 0 & 1 & 323,076 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{v_S} \approx \begin{pmatrix} 507,692 \\ 369,230 \\ 323,076 \end{pmatrix}$$

Hier könnte man noch als Probe zeigen, dass die Lösung tatsächlich die stabile Verteilung ist.
Dieser Ansatz ist eine exakte Lösung und somit gegenüber der Nachfolgenden zu bevorzugen.
[Siehe LB, S. 63f.]

ii) Lösen über die Grenzmatrix:
Die Grenzmatrix wird durch *hohe* Potenzen der Übergangsmatrix M 'numerisch bestimmt':
M^{10} zeigt bereits geringe Abweichungen in den Spaltenvektoren; M^{30} auf 3 Stellen exakt;
weitere Stabilität zeigt, dass die Grenzmatrix $M_G := \lim\limits_{k \to \infty} M^k \approx M^{50}$.
Somit ergibt sich die stabile Verteilung zu:

$$\vec{v_S} \approx M^{50} \cdot \vec{v_0} \approx \begin{pmatrix} 507,692 \\ 369,230 \\ 323,076 \end{pmatrix}$$

[Siehe LB, S. 173 und S. 199 Kästen.]

Wenn genau eine stabile Verteilung existiert, hat das LGS genau eine Lösung und es existiert eine Grenzmatrix. Betrachtet man die beiden Extremfälle für eine Übergangsmatrix, erkennt man die anderen in i) genannten Möglichkeiten:

$M = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, so ist jede Verteilung stabil, wohingegen für

$M = N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nur die unsinnige (d.h. zu verwerfende) Verteilung: $\vec{v_S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stabil wäre.

---

①) Allgemein genügen bei drei Unbekannten auch drei Gleichungen – es ergeben sich drei Fälle:
1) Genau eine Lösung – bei einem 'überbestimmten LGS' mit mehr Gleichungen als Unbekannten müssen einige Zeilen (hier eine) unnötig [d.h. von anderen Zeilen 'linear abhängig'] sein, die dann zu Nullzeilen (ähnlich beim Matrix-Invertieren bei Nichtinvertierbarkeit) werden;
2) unendlich viele Lösungen – zwangsläufig bei einem 'unterbestimmten LGS' der Fall, bei dem es weniger linear unabhängige Gleichungen als Variablen gibt; oder
3) keine Lösung – hier wird beim Umformen ein Widerspruch (↯) im LGS aufgedeckt.

②) '`B`' steht für `rref` und somit für `'Reduced Row Echelon Form'`, d.h. für Diagonalform einer Matrix; hingegen steht '`A`' für `ref` und somit für `'Row Echelon Form'`, d.h. für 'obere Dreiecksform' einer Matrix.