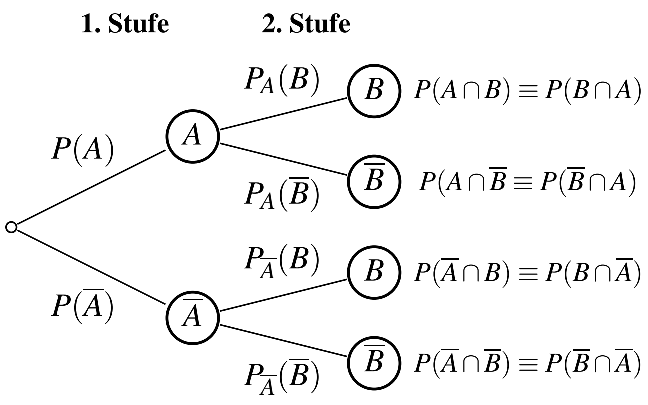
Mathematik

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik II

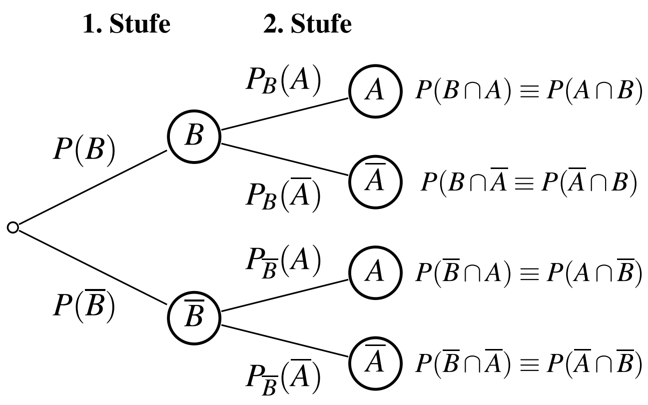
❍ Grundlagen aus der Mengenlehre (nicht so bedeutsam – nur zum klareren Gebrauch)

- **Schnitt von Mengen**: $A \cap B$: ‘Menge A geschnitten mit Menge B’ bzw. ‘Ereignis A und B’.
  Es gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$ (bei stochastisch unabhängigen Ereignissen: $P_A(B) = P(B)$)
  ➟ Pfadwahrscheinlichkeit: Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfads.
- **Vereinigung von Mengen**: $A \cup B$: ‘Menge A vereinigt mit Menge B’ bzw. ‘Ereignis A oder B’.
  Es gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (bei Ereignissen ohne gemeinsame Elementarereignisse [man sagt dann A und B sind disjunkte Mengen] entfällt der 3. Term – so wie zumeist erwartet)
  ➟ Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses: Summe aller zugehörigen / ‘günstigen’ Pfade.
- **Leere Menge**: ‘Kein Element’ bzw. ‘kein Elementarereignis’ bzw. ‘nicht mögliche Ereignisse’.
  Es gilt: $P(\varnothing) \equiv P(\{\}) = P(\overline{S}) = 0$.
- **Grundgesamtheit**: In der Stochastik die Menge aller (hier m) Elementarereignisse (und somit aller möglichen Ergebnisse) – d.h. das sichere Ereignis $S \equiv \Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\} = \bigcup_{i=1}^{m} e_i \equiv \bigcup_{i=1}^{m} \omega_i$.
  Es gilt: $P(S) = P(\overline{\varnothing}) = P(e_1 \cup e_2 \ldots \cup e_m) = P(e_1) + P(e_2) + \ldots + P(e_m) = 1$.
- **Komplement einer Menge**: $\overline{A}$: ‘Komplement von A’ bzw. Ereignis ‘nicht A’ / ‘A quer’; der Rest, der der Menge zur Grundgesamtheit fehlt: $\overline{A} = S \backslash A$ – ‘S ohne A’. Es gilt: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- FS: 1) Mengen (S. 5 | S. 8 | S. 1), 2) Pfadregeln (S. 37 | S. 51 | S. 40) [gr. Tafelwerk, Cornelsen | FS bis zum Abi, Duden / Paetec | Sieber, Klett].

❍ Baumdiagramme / Vierfeldertafel & bedingte Wahrscheinlichkeiten (siehe auch nächster Punkt)



Baumdiagramm 1



Baumdiagramm 2

	B	$\overline{B}$	Σ
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Σ	$P(B)$	$P(\overline{B})$	$P(S)$

Vierfeldertafel

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A) = P(A) \cdot P_A(B)$ [Pfadmultiplikation];

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ [Pfadaddition Fächer / Knotenregel];

$P(S) = P(A) + P(\overline{A}) = P(B) + P(\overline{B}) = 1$ [sicheres Ereignis]
$= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Es gibt keine gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten auf den Zweigen der beiden Baumdiagramme; man muss über die Pfadwahrscheinlichkeiten und Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten gehen, d.h. quasi über den Umweg der Vierfeldertafel.

❍ Bedingte Wahrscheinlichkeit

➢ **Bedingte Wahrscheinlichkeit**: Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A: $P_A(B) \equiv P(B|A)$.

➢ Aus dem Multiplikationssatz ('Produktregel'): $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$ ergibt sich die **Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit**: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ bzw. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

➢ **Bayes-Regel**:
Nimmt man nun auch den Additionssatz ('Summenregel'): $P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)$ zu Hilfe, ergibt sich: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)}$.

➢ **Stochastische Unabhängigkeit**:
Zwei Ergebnisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn gilt:
$P_B(A) = P(A)$ bzw. $P_A(B) = P(B) \iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
Im Falle medizinischer Tests mit A 'Patient krank' und B 'Test positiv' (Test zeigt auch krank an; entdeckt den Erreger etc.) bedeutete die Unabhängigkeit von A und B, dass 'Test positiv' nichts mit 'Patient krank' zu tun hat, der Test also Unsinn ist – man kann hier also von Abhängigkeit ausgehen.

➲ LB S. 68+71 Nr. 11 [Bedingte Wahrscheinlichkeiten], S. 75 [Stochastische Unabhängigkeit], S. 73f [medizinische Tests] & FS S. 37 [Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten] {Neue Wege: Stochastik, Schroedel & gr. Tafelwerk, Cornelsen; diese Angaben gelten auch für die letzte Zeile}.

❍ Definitionen zur Stochastik – '*Kunst des Vermutens*'

♣ **Zufallsexperiment**: Das nächste (zukünftige) Ergebnis/Elementarereignis ist nicht vorherzusagen – auch nicht durch lange Beobachtung des Experiments (es gibt kein 'Muster').

⚀ **Laplace-Experiment**: Alle m Elementarereignisse/möglichen Ergebnisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit: $P = \frac{1}{m}$ [Beispiele (idealisiert): Münze, Würfel, Glücksrad].

⚁ **Bernoulli-Experiment**: Es gibt genau zwei Elementarereignisse.
Mit p: Wahrscheinlichkeit 'ausgesuchtes/günstiges Ereignis/Erfolg' und q: Wahrscheinlichkeit anderes Ereignis/'Misserfolg' gilt: $p + q = 1$.
Bernoulli-Kette: 'n-stufig' bei n Wiederholungen mit gleich bleibendem p.

⚂ **Relative Häufigkeit & Wahrscheinlichkeit**:
Relative Häufigkeit: $h = \frac{H}{n}$ =Zahl der 'Treffer'/Zahl der 'Chancen', $h \in [0;1]$ = [kein Treffer;nur Treffer];
H (absolute Häufigkeit) und h gehören zur Praxis; Wahrscheinlichkeit: $P \in [0;1]$ = [unmögliches Ereignis; sicheres E.];
Gesetz der großen Zahlen: $h \xrightarrow[n \to \infty]{} P$ (Brückenschlag von Praxis/Experiment zur Theorie).

⚃ **Zufallsgröße**: 1. Zuordnung Ergebnis/Elementarereignis zu reeller Zahl; 2. Zufallsversuch.
[Beispiele: Augenzahl beim Würfeln mit zwei 6-er Würfeln; Anzahl roter Autos (pro Zeiteinheit über Kreuzung)]
Zumeist ein Großbuchstabe, häufig X.

⚄ **Wahrscheinlichkeitsverteilung**/Verteilung einer Zufallsgröße:
Zuordnung eines Ereignisses einer Zufallsgröße zu genau einer Wahrscheinlichkeit.
Anschaulich: Ereignis '$X = 3$' für 'genau 3 rote Autos' $\to$ $P(X = 3)$; ggf. über Tabelle, Histogramm oder einen Term (Einsatz GTR, s.u.).

⚅ **Erwartungswert einer Zufallsgröße**:
Sei X Zufallsgröße mit Werten $e_1, e_2, \ldots, e_m$ und entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $P(X = e_1), P(X = e_2), \ldots, P(X = e_m)$, dann gilt für den Erwartungswert $\mu_X = E(X)$:

$$E(X) = e_1 \cdot P(X = e_1) + e_2 \cdot P(X = e_2) + \ldots + e_m \cdot P(X = e_m) = \sum_{i=1}^{m} e_i \cdot P(X = e_i).$$

✌ **Bernoulli-Formel/Binomialverteilung**:
Bei einer n-stufigen Bernoulli-Kette ist die Wahrscheinlichkeit für k 'gewünschte Ereignisse':

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, $k \in [0;n]$. Diese Verteilung heißt Binomialverteilung.

Hierbei ist der Binomialkoeffizient ('n über k'; anschaulich: k aus n Kugeln ohne Zürücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge ziehen): $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ mit $\binom{n}{0} = 1$ und der Fakultät: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$.

GTR: Berechnung der Binomialverteilung für eine n-stufige Bernoulli-Kette:

a) $P(X = k)$: {CASIO FX-CG}: [Menu]+[A], [OPTN]+[F5], [F3], [F5], [F1], (k,n,p) | {TI-84$^+$}: [2nd]+[VAR] = [DISTRibution] – `binompdf` (n,p,k);

b) $P(X \leq k)$: {CASIO FX-CG}: [Menu]+[A], [OPTN]+[F5], [F3], [F5], [F2], (k,n,p) | {TI-84$^+$}: [2nd]+[VAR] = [DISTRibution] – `binomcdf` (n,p,k).

Tipp: $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq (k-1))$, da k ganzzahlig und $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

➲ LB S. 120 [Bernoulli-Kette & Binomialverteilung], 58+61 [Binomialkoefffizient] & FS S. 38 [Zufallsgr. u.i. Wahrsch.-V.].