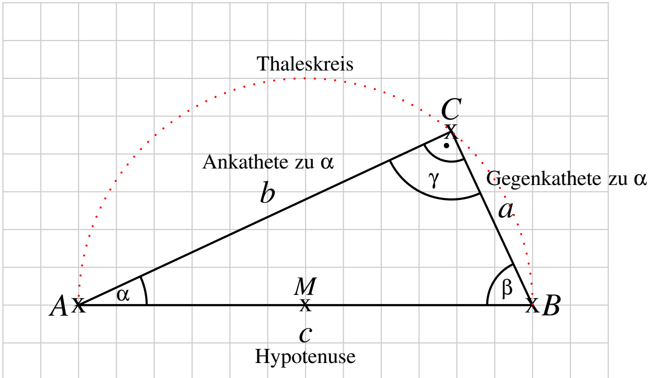
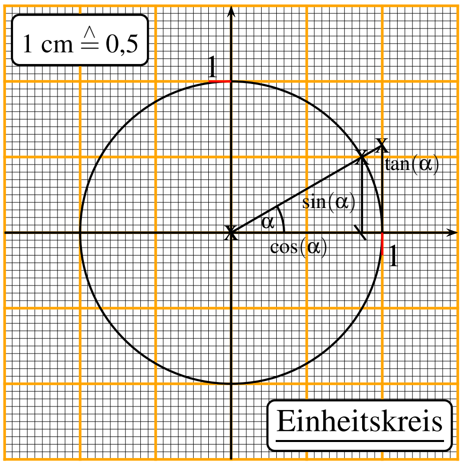
Mathematik

Rechtwinklige Dreiecke



0) Nomenklatur und Bild (für $\gamma = 90°$):
Die Seite gegenüber des rechten Winkels heißt Hypotenuse, die anderen beiden Seiten werden Katheten genannt.

1) a) **Satz des Pythagoras**: $a^2 + b^2 = c^2$, wobei c die Hypotenuse ist. In Worten: 'Die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypotenusenquadrat'.
b) Der Mittelpunkt der Hypotenuse (M) ist das Zentrum des **Thaleskreises**, des Umkreises des rechtwinkligen Dreiecks.



2) Es gelten die folgenden **Winkelbeziehungen**:

$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$;

$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$;

$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

$\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha)$; $\sin(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$.

$(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$ (Satz des Pythagoras).

$\sin(0°) = \cos(90°) = 0$; $\sin(30°) = \cos(60°) = \frac{1}{2}$; $\cos(0°) = \sin(90°) = 1$;

$\tan(0°) = 0$; $\tan(30°) = 1$; $\tan(\alpha \to 90°) \to \infty$;

$\cos(180°) = -1$; $\sin(180°) = 0$.

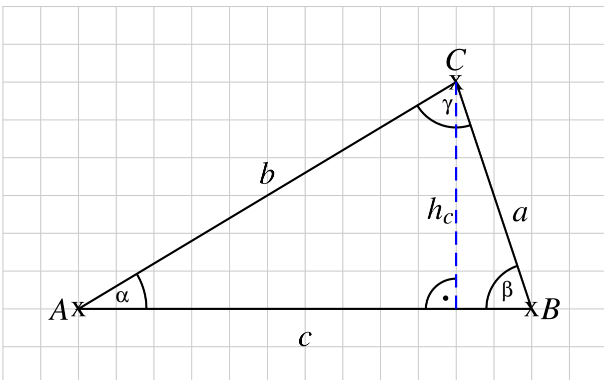
Erweiterung auf $\alpha \in (90°, 180°)$:

$\sin(\alpha) = \sin(180° - \alpha)$; $\cos(\alpha) = -\cos(180° - \alpha)$.

Umkehrfunktionen: $\arcsin := \sin^{-1}$, $\arccos := \cos^{-1}$, $\arctan := \tan^{-1}$.

[*tri* – drei; *gonon* – eck; *metron* – Maß; *sinus* – Bogen, Krümmung, Busen; *cosinus* = *complementi sinus* – Vervollständigung des sin, *tangens* – Berührende (Kreis)]

Beliebige Dreiecke (Verallgemeinerung - inkl. Spezialfall $\gamma = 90°$)



0) Über die Konstruktion der 3 Höhen kann man jeweils das Dreieck in 2 rechtwinklige Dreiecke zerlegen (im Bild am Beispiel der Grundseite c als h_c gezeigt); Fläche: $A_\Delta = g \cdot h_g$.

1) (Innen-) **Winkelsumme**: $180° = \alpha + \beta + \gamma$.

2) **Fläche** beliebiger Dreiecke:
$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin(\beta)$.

3) **Sinussatz**: $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$.

4) **Kosinussatz**:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$,
$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos(\beta)$,
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$.

priv. jmb@jmb-edu.de

Lösung der Arbeitsblätter zum Sinus- / Kosinussatz (11.09.2016)

Messung

$\overline{CR} \approx 11{,}35\,cm \mathrel{\hat=} 15{,}589\,sm$

$\overline{CL} \approx 13{,}2\,cm \mathrel{\hat=} ?\,sm$

$\overline{LR} \approx 8{,}8\,cm \mathrel{\hat=} 12{,}437\,sm$

$\frac{\overline{CL}_g}{\overline{CR}_g} = \frac{\overline{CL}}{\overline{CR}} \Rightarrow \overline{CL} \approx 18{,}13\,sm$

$\left.\begin{array}{l}\lambda \approx 58^\circ \doteq 57^\circ \\ \gamma \approx 41^\circ \doteq 42^\circ\end{array}\right\}$ AB 1

$\rho \approx 80^\circ \doteq 81^\circ \}$ AB 2

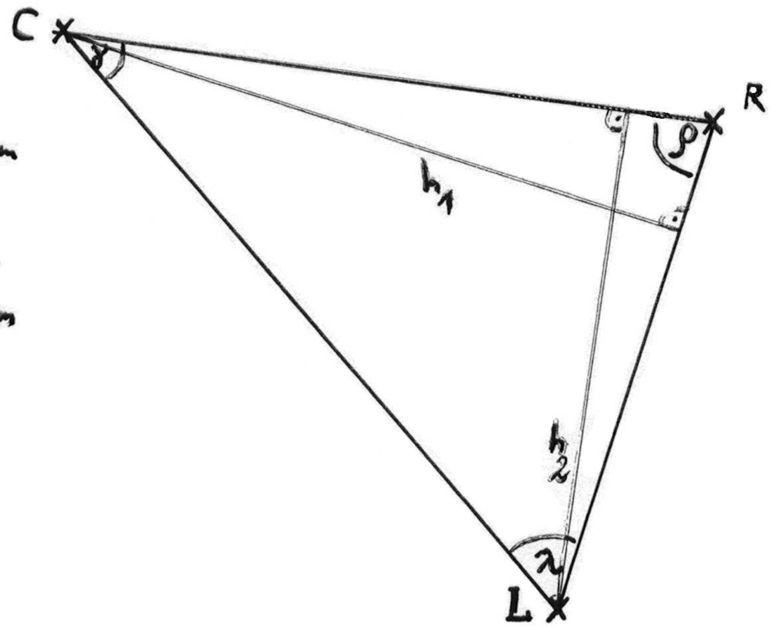
AB 1

(1) $\left.\begin{array}{l}\sin(\rho) = \frac{h_1}{\overline{CR}} \\ \sin(\lambda) = \frac{h_1}{\overline{CL}}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\Rightarrow h_1 = \sin(\rho)\cdot\overline{CR} \overset{a}{=} \sin(\lambda)\cdot\overline{CL} \\ \Rightarrow \overline{CL} = \frac{\sin(\rho)}{\sin(\lambda)}\cdot\overline{CR} \approx 18{,}102\,sm\end{array}$

(2) $\left.\begin{array}{l}\sin(\rho) = \frac{h_2}{\overline{LR}} \\ \sin(\gamma) = \frac{h_2}{\overline{CL}}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\Rightarrow h_2 = \sin(\rho)\cdot\overline{LR} \overset{b}{=} \sin(\gamma)\cdot\overline{CL} \\ \Rightarrow \overline{CL} = \frac{\sin(\rho)}{\sin(\gamma)}\cdot\overline{LR} \approx 18{,}669\,sm\end{array}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\sin(\rho)}{\overline{CL}} \overset{b}{=} \frac{\sin(\lambda)}{\overline{CR}} \overset{a}{=} \frac{\sin(\gamma)}{\overline{LR}}}$$

Sinussatz



AB 2

$x^2 \overset{1}{=} s^2 + h_2^2$

$\overline{CR} \overset{2}{=} s + t$

$\sin(\rho) \overset{3}{=} \frac{h_2}{\overline{LR}}$

$\cos(\rho) \overset{4}{=} \frac{t}{\overline{LR}}$

$$\begin{aligned} x^2 &\overset{1}{=} s^2 + h_2^2 \\ &\overset{2}{=} h_2^2 + (\overline{CR} - t)^2 \overset{BF}{=} h_2^2 + \overline{CR}^2 - 2\,\overline{CR}\cdot t + t^2 \\ &\overset{3+4}{=} \overline{LR}^2\cdot(\sin(\rho))^2 + \overline{CR}^2 - 2\cdot\overline{CR}\cdot\overline{LR}\cdot\cos(\rho) + \overline{LR}^2\cdot(\cos(\rho))^2 \\ &= \overline{LR}^2\cdot\big[\underbrace{(\sin(\rho))^2 + (\cos(\rho))^2}_{=1}\big] + \overline{CR}^2 - 2\cdot\overline{CR}\cdot\overline{LR}\cdot\cos(\rho) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{CL}^2 = \overline{LR}^2 + \overline{CR}^2 - 2\cdot\overline{CR}\cdot\overline{LR}\cdot\cos(\rho)}$$

Kosinussatz