

Mathematik

Erinnerung an Fachbegriffe

Addition: '1. Summand' + '2. Summand' = Summe
 Subtraktion: Minuend - Subtrahend = Differenz
 Multiplikation: '1. Faktor' · '2. Faktor' = Produkt
 Division: Dividend / Divisor = Quotient

Bei Vorzeichen | Vorzeichen der Punktrechnung sowie bei Operationszeichen | Vorzeichen (d.h. Strichrechnung) gilt:

$\begin{matrix} \backslash + / & \backslash + / & \backslash - / & \backslash - / \\ \backslash + / & \backslash - / & \backslash - / & \backslash + / \end{matrix} = \begin{matrix} \backslash + / & & & \\ \backslash - / & & & \end{matrix}$ &

$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$ = Bruch [Q: Menge der rationalen Zahlen, d.h. alle Brüche]

Potenz: Basis^{Exponent} = Grundzahl^{Hochzahl} = Wert der Potenz

Wurzel: Wurzelexponent $\sqrt{\text{Radikant}}$ | Koeffizient: Bei-/Vorzahl (Faktor vor Variablen/Basisvektor)

Zahlenmengen: Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$,

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \{x = \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}\}$, Reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, mit \mathbb{I} : irrationale Zahl, z.B.

$\sqrt{2}, \pi, e$ - unendlich viele Nachkommastellen ohne Periodizität bzw. 'Muster'; \mathbb{R} ist bis zum Abitur Standard und maximaler Zahlenraum;

(Erst im Studium): Komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{z = x + i \cdot y : x, y \in \mathbb{R}, i^2 := -1 \text{ (genannt: 'imaginäre Einheit'; in Elektrotechnik auch } j)\}$

Schreibweise von (abgeschlossenem bzw. offenem) Intervall und Relation: $x \in [a; b] \equiv a \leq x \leq b$ bzw. $x \in]a; b[\equiv a < x < b$

Gesetze und Formeln

Festgelegte Reihenfolge: Ausdrücke innerhalb von Klammern ['(...)'] vor Potenzen ['...^x'] vor Punktrechnung ['·' und ':' bzw. '·' bzw. '·'] vor Strichrechnung ['+' und '-']

Kommutativgesetz (Vertauschung; **KG**): $a + b = b + a;$ $a \cdot b = b \cdot a;$
 !Achtung! $a - b = a + (-b) = (-b) + a = -b + a;$ $a : b = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$
 Assoziativgesetz (Verbindung; **AG**): $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c;$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$
 Distributivgesetz (Verteilen; **DG**): $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot b + a \cdot c$

Bruchrechnung ('0' nie als Nenner bzw. zum Erweitern/Kürzen):

Reziproke Zahlen (Kehrwert): $n, \frac{1}{n}; \frac{a}{b}, \frac{b}{a};$ $n \cdot \frac{1}{n} = 1, \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

Über-Kreuz-Multiplikation: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

Erweitern / Kürzen ($z \neq 0$): $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot z}{b \cdot z}$ $\frac{a}{b} = \frac{a : z}{b : z}$

Addition / Subtraktion (Hauptnenner): $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$ $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$

Multiplikation / Division: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Binomische Formeln [1.; 2.; 3. **BF**]: $(a + b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2;$ $(a - b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2;$ $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

p-q-Formel (bei $x^2 + p \cdot x + q = 0$): $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q};$ Satz von Vieta: $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$



\rightarrow <http://www.youtube.com/watch?v=tRblwTsX6hQ> [**Mathe-Song**: DorFuchs - "p-q-Formel (Die Lösungsformel)" ©]

Potenz-Definitionen: $x^0 = 1$ ($x \neq 0$); $x^1 = x;$ $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}};$ $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ($x \neq 0$)

Potenzsätze: $x^m \cdot x^n = x^{m+n},$ $x^m : x^n = x^{m-n},$
 $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n,$ $x^n : y^n = \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n = (x : y)^n,$
 $(x^m)^n = x^{m \cdot n} = (x^n)^m$

Wurzeln: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x};$ $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m};$ $x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}.$

$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y},$ $\sqrt[n]{x} : \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}},$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$

Logarithmen: $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$ $\log(x) := \log_{10}(x);$ $\ln(x) := \log_e(x)$
 $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$ $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$

Definition von Funktion, Umkehrfunktion und Wurzeln

1) Eine Funktion $f(x)$ ordnet einem Element der Definitions- (\mathbb{D}) genau ein Element der Zielmenge / Wertemenge [-bereich/-vorrat] (\mathbb{W}) zu: $x \xrightarrow{f(x)} y; x \in \mathbb{D}_f; y \in \mathbb{W}_f$.

2) Eine Funktion $f(x)$ heißt Umkehrfunktion von $g(y)$, wenn $f(g(y)) = y$ gilt – und somit: $y \xleftarrow{g(y)} x \xrightarrow{f(x)}$

Man schreibt: $g^{-1}(x) := f(x)$ und entsprechend $f^{-1}(y) := g(y)$.

[Umkehrbar: Jedes Element der Wertemenge wurde genau von einem Element der Definitionsmenge zugeordnet.]

Vorsicht: $g^{-1}(x) \neq \frac{1}{g(y)} = (g(y))^{-1}$. [Dies wird leider nicht sauber voneinander getrennt!!!]



→ <http://www.youtube.com/watch?v=H7g67oOwqVY> [Mathe-Song: Mathekaiser – "Umkehrsong" ©]

3) Die n-te Wurzel $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ist die Umkehrfunktion von der n-ten Potenz $g(y) = y^n$:

$$\sqrt[n]{x^n} = (x^n)^{\frac{1}{n}} = x^{(n \cdot \frac{1}{n})} = x^1 = x = x^{(\frac{1}{n} \cdot n)} = (\sqrt[n]{x})^n, \text{ wobei } n \neq 0, x > 0.$$

Vorsicht: Der Radikant darf nicht negativ sein, sonst ist die Wurzel bzw. die entsprechende Potenz in \mathbb{R} nicht definiert!

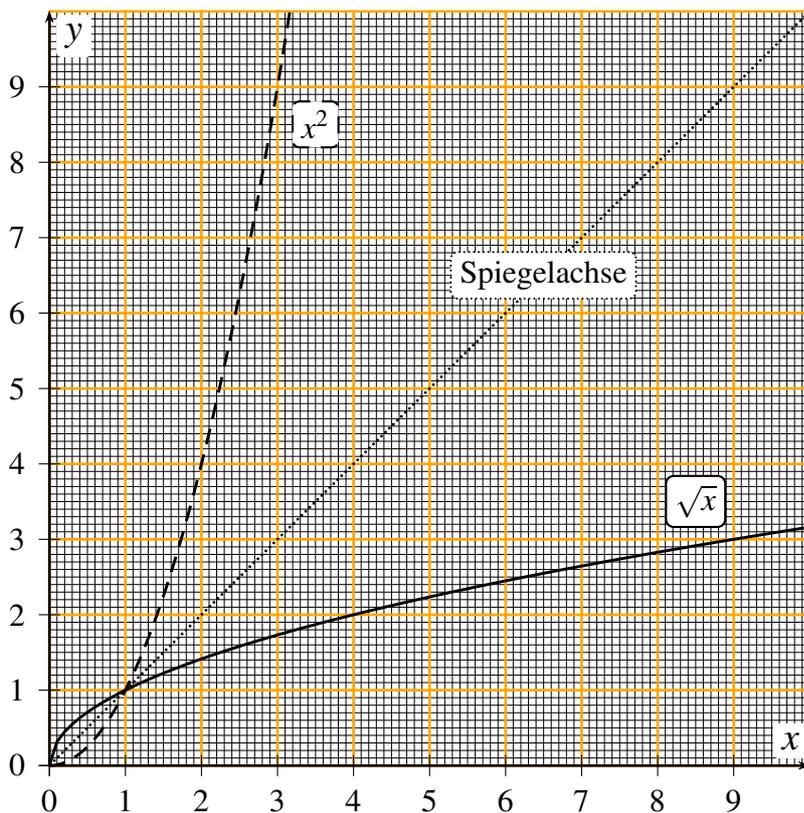
Dies kann man sehr leicht sehen, z.B. am folgenden Beispiel:

$$-2 \stackrel{?}{=} \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64} = 2 \quad \checkmark$$

Satz: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}, n \neq 0, q \neq 0, x > 0: \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[q]{x^p}$.

Mit Einschränkung auf positive Radikanten gelten die bekannten Potenzgesetze auch für Wurzeln!

4) Graphischer Zusammenhang von quadratischer Wurzelfunktion und Parabel:



Kartesisches Koordinatensystem:

orthogonales System $[P = (x_P|y_P)]$

Abszisse: x-Wert bzw. x-/Quer-Achse;

Ordinate: y-Wert bzw. y-/Hoch-Achse;

Die vier Quadrante:

1. Quadrant: $x > 0 \wedge y > 0$,

2. Quadrant: $x < 0 \wedge y > 0$,

3. Quadrant: $x < 0 \wedge y < 0$,

4. Quadrant: $x > 0 \wedge y < 0$,

Koordinatenursprung/Nullpunkt: $(0|0)$.

Graph von $f: \mathbb{G}_f = \{(x|f(x)): x \in \mathbb{D}_f\}$.

Spezielle Punkte bei der Kurvendiskussion:

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$S_y = (0|f(0));$$

n-te Nullstelle/Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$N_n \equiv \text{NS}_n \equiv S_{x,n} = (x_{\text{NS},n}|0);$$

n-ter Scheitelpunkt/Extrempunkt/Fußpunkt:

$$S_n \equiv \text{XP}_n = (x_{\text{XP},n} | f(x_{\text{XP},n})) - \text{Parabel:}$$

i) $a > 0: S_n \rightarrow T_n \equiv \text{TP}_n$ [Tiefpunkt],

ii) $a < 0: S_n \rightarrow H_n \equiv \text{HP}_n$ [Hochpunkt];

[ab kubischer Funktion $-x^3$: n-ter Wendepunkt: WP_n].

5) Formen der quadratischen Funktion (ganzrationale Funktion 2. Grades/Parabel):

$$f(x) = \underbrace{a \cdot x^2}_{\text{quadratisches Glied}} + \underbrace{b \cdot x}_{\text{lineares Glied}} + \underbrace{c}_{\text{konstantes Glied}} \quad (\text{allgemeine Form; AF})$$

[bei $a = +1$: Normalparabel]

$$f(x) = a \cdot (x + d)^2 + e \quad (\text{Scheitelpunktform; SF})$$

$$\Rightarrow S = (-d|e) = \left(-\frac{b}{2a} \mid -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \quad (\text{Scheitelpunkt})$$

$$f(x) = a \cdot (x - x_{\text{NS},1}) \cdot (x - x_{\text{NS},2}) \quad (\text{faktorierte Form; FF})$$

$$\Rightarrow \text{NS}_1 = (x_{\text{NS},1}|0), \text{NS}_2 = (x_{\text{NS},2}|0)$$