Physik

Die Maxwell'schen Gleichungen

Im folgenden werden die physikalischen Größen im rationalen MKSA-System bzw. in SI-Einheiten angegeben.
Mit: $\vec{F}_C = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$: Coulomb-Kraft; $\vec{F}_L = Q\cdot\left(\vec{E}(\vec{r},t)+\vec{v}\times\vec{B}(\vec{r},t)\right)$: Lorentz-Kraft;
$\varepsilon_0 = 8.8541878\ldots\cdot 10^{-12}$ F/m: elektrische Feldkonstante; $\mu_0 := 4\pi\cdot 10^{-7}$ H/m: Magnetische Feldkonstante;
$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\cdot\mu_0}} := 2{,}99792458\cdot 10^8$ m/s: Lichtgeschwindigkeit im Vakuum;
$\vec{E} = \frac{\vec{F}_C}{Q_2} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\int\frac{\rho\cdot\vec{r}}{r^3}\cdot dV$: elektrisches Feld; $\vec{D} = \varepsilon\cdot\vec{E}$: elektrische Flussdichte;
$\vec{j}$: Stromdichte; ρ: Ladungsdichte; $\operatorname{div}\vec{j}+\dot{\rho} = 0$: Kontinuitätsgleichung;
$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\cdot\int\frac{\left(\vec{j}+\varepsilon_0\cdot\vec{E}\right)\times\vec{r}}{r^3}dV$: Magnetfeld (bzw. magnetische Flussdichte); $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$: magnetische Erregung;
$\Phi = \int_A \vec{B}\cdot d\vec{A}$: magnetischer Fluss durch A; magnetische und induzierte Ringspannung auf einem geschlossenen Weg C: $\overset{o}{u}_m = \oint_C \vec{H}\cdot d\vec{s}$ und $\overset{o}{u}_i = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{s}$; Leitungsstrom i und Verschiebungsstrom i_D durch die von $C = \partial A$ umrandete Fläche A: $i = \int_A \vec{j}\cdot d\vec{A}$ und $i_D = \frac{\partial}{\partial t}\int_A \vec{D}\cdot d\vec{A}$;
φ: elektrostatisches Potential $\left(-\vec{\nabla}\varphi = \vec{E}\right)$; $\vec{A}$: Vektorpotential $\left(\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{B}\right)$ gilt:

$$❶ \quad \oint_{\partial V = A}\vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{\pm Q}{\varepsilon_0}\left(= \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\int_V \rho\cdot dV\right) \iff (-\triangle\varphi =)\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\rho \qquad \left(\operatorname{div}\vec{D} = \rho\right);$$

$$❷ \quad \oint_{\partial V = A}\vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \iff \operatorname{div}\vec{B} = 0;$$

$$❸ \quad (\overset{o}{u}_i =)\oint_{\partial A = C}\vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B}\cdot d\vec{A}\left(= -\frac{d}{dt}\Phi\right) \iff \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};$$

$$❹ \quad (\overset{o}{u}_m\cdot\mu_0 =)\oint_{\partial A = C}\vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0\cdot\int_A \vec{j}\cdot d\vec{A}+\mu_0\cdot\varepsilon_0\cdot\frac{d}{dt}\int_A \vec{E}\cdot d\vec{A} \ (= (i+i_D)\cdot\mu_0)$$

$$\iff \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\cdot\vec{j}+\mu_0\cdot\varepsilon_0\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

Erklärung:
0) Die Divergenz, $\operatorname{div}\vec{X} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i} = \vec{\nabla}\cdot\vec{X} = \lim_{|\Delta V|\to 0}\left(\frac{1}{|\Delta V|}\cdot\int_{\partial(\Delta V)}\vec{X}\cdot d\vec{A}\right)$, wird als Quellendichte interpretiert,
die Rotation, $\operatorname{rot}\vec{X} = \vec{\nabla}\times\vec{X}$, liefert bei einem Strömungsfeld $\vec{X}$ die doppelte Winkelgeschwindigkeit;
der Gradien, $\operatorname{grad}(f) = \vec{\nabla}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{e}_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\vec{e}_n\right)$, gibt die größte Änderungsrate des Skalarfeldes f an;
jeweils mit dem Nabla-Operator: $\vec{\nabla} := \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, der also schlicht aus den partiellen Ableitungen besteht.
1) Elektrische Feldlinien beginnen oder enden an elektrischen Ladungen; der Fluss elektrischer Feldlinien durch eine geschlossene Oberfläche entspricht der eingeschlossenen Ladung.
2) Es gibt keine magnetischen Ladungen (bzw. Monopole; man spricht von Quellen-Freiheit und es gilt: $\operatorname{div}\vec{X} = 0$).
3) Ein zeitlich veränderlicher magnetischer Fluss durch eine Fläche erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld.
[Die Feldlinien von Wirbelfeldern sind in sich geschlossen und nicht an die Existenz von Quellen und Senken gebunden. Die Bereiche, um die sich Feldlinien zusammenziehen, werden als Wirbel (engl. curl) bezeichnet.]
4) Ein zeitlich veränderlicher elektrischer Fluss und/oder ein Verschiebungsstrom erzeugen ein magnetisches Wirbelfeld (bei einem wirbelfreien Feld $\vec{X}$ würde gelten: $\operatorname{rot}\vec{X} = \vec{0}$).

Das Ohm'sche Gesetz:
Mit Querschnittsfläche: A, Länge: L, Spannung: $U = \vec{L}\cdot\vec{E}$, Stromstärke: $I = \vec{j}\cdot\vec{A}$, spezifischem Widerstand: ρ_0 und Widerstand: $R = \rho_0\cdot L/A$ gilt:
Ohm'sches Gesetz: $U = I\cdot R \implies$ Differentielles Ohm'sches Gesetz: $\vec{E} = \rho_0\cdot\vec{j}$.

Gegenüberstellung: MKS- und Gauß-CGS-System

Die Grundgesetze der Elektrodynamik (im Vakuum) in den verschiedenen Maßsystemen		
Bezeichnung	MKS-System	CGS-System
Coulombkraft	$\vec{F} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\ \left(=q\cdot\vec{E}\right)$	$\vec{F} = \frac{q_1\cdot q_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\ \left(=q\cdot\vec{E}\right)$
Lorentz-Kraftdichte Lorentzkraft	$\vec{f} = \rho\cdot\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}$ $\vec{F} = q\cdot\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$	$\vec{f} = \rho\cdot\vec{E} + \frac{1}{c}\cdot\vec{j}\times\vec{B}$ $\vec{F} = q\cdot\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\cdot\vec{v}\times\vec{B}\right)$
Gaußscher Satz Coulombgesetz	$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\vec{E} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\int\frac{\rho\cdot\vec{r}}{r^3}\,d^3r$	$\mathrm{div}\,\vec{E} = 4\cdot\pi\cdot\rho$ $\vec{E} = \int\frac{\rho\cdot\vec{r}}{r^3}\,d^3r$
Biot-Savartsches Gesetz	$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\cdot\left(\vec{j}+\varepsilon_0\cdot\dot{\vec{E}}\right)$ $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\cdot\pi}\cdot\int\frac{(\vec{j}+\varepsilon_0\cdot\dot{\vec{E}})\times\vec{r}}{r^3}\,d^3r$	$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{4\cdot\pi}{c}\cdot\vec{j}+\frac{1}{c}\cdot\dot{\vec{E}}$ $\vec{B} = \frac{1}{c}\cdot\int\frac{(\vec{j}+\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\dot{\vec{E}})\times\vec{r}}{r^3}\,d^3r$
Induktionsgesetz	$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$	$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\cdot\dot{\vec{B}}$
Kontinuitätsgl.	$\mathrm{div}\,\vec{j}+\dot{\rho} = 0$	$\mathrm{div}\,\vec{j}+\dot{\rho} = 0$
Elektr. Potential Magnet. Potential	$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi-\dot{\vec{A}}$ $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$	$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi-\frac{1}{c}\cdot\dot{\vec{A}}$ $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$
Lorentzkonvention Wellengleichung	$\mathrm{div}\vec{A}+\frac{1}{c^2}\cdot\dot{\Phi} = 0$ $\Box\Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0};\qquad \Box\vec{A} = \mu_0\cdot\vec{j}$	$\mathrm{div}\vec{A}+\frac{1}{c}\cdot\dot{\Phi} = 0$ $\Box\Phi = 4\cdot\pi\cdot\rho;\qquad \Box\vec{A} = \frac{4\cdot\pi}{c}\cdot\vec{j}$
Energiedichte Poyntingscher Vektor	$u = \frac{1}{2}\cdot\left(\varepsilon_0\cdot\vec{E}^2+\frac{1}{\mu_0}\cdot\vec{B}^2\right)$ $\vec{S} = \varepsilon_0\cdot c^2\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$	$u = \frac{1}{8\cdot\pi}\cdot\left(\vec{E}^2+\vec{B}^2\right)$ $\vec{S} = \frac{c}{4\cdot\pi}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$
Maxwell'scher Spannungstensor	$T_{ij} = \varepsilon_0\cdot E_i\cdot E_j+\frac{1}{\mu_0}\cdot B_i\cdot B_j+$ $-\frac{1}{2}\cdot\delta_{ij}\cdot\left(\varepsilon_0\cdot\vec{E}^2+\frac{1}{\mu_0}\cdot\vec{B}^2\right)$	$T_{ij} = \frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\Big[E_i\cdot E_j+B_i\cdot B_j+$ $-\frac{1}{2}\cdot\delta_{ij}\cdot\left(\vec{E}^2+\vec{B}^2\right)\Big]$
Vierer Tensor des elektromagnetischen Feldes	$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -c\cdot B_z & c\cdot B_y \\ E_y & c\cdot B_z & 0 & -c\cdot B_x \\ E_z & -c\cdot B_y & c\cdot B_x & 0 \end{pmatrix}$	$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$
Dualer Feldtensor	$\left(F^{D,\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -c\cdot B_x & -c\cdot B_y & -c\cdot B_z \\ c\cdot B_x & 0 & E_z & -E_y \\ c\cdot B_y & -E_z & 0 & E_x \\ c\cdot B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$	$\left(F^{D,\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$
Viererstrom und Viererpotential	$(j^\mu) = \begin{pmatrix} c\cdot\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix};\quad (A^\mu) = \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$	$(j^\mu) = \begin{pmatrix} c\cdot\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix};\quad (A^\mu) = \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$
Maxwell'sche Gleichungen in kovarianter Form	$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \mu_0\cdot j^\nu;\quad \frac{\partial F^{D,\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0$ $F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}$	$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{4\cdot\pi}{c}\cdot j^\nu;\quad \frac{\partial F^{D,\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0$ $F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}$