Physik

Kosmologie

Ansatz für die Berechnung kosmologischer Modelle ist das Kosmologische Prinzip (oder Weltpostulat), von dem hier drei äquivalenten Formulierungen angegeben werden:
Im Universum sind alle Positionen und Richtungen gleichwertig;
Der Kosmos ist räumlich in sehr großem Maßstab ($> 30\,\mathrm{Mpc} \mathrel{\hat{\approx}} 9 \cdot 10^{23}\,\mathrm{m}$) homogen und isotrop;
Das Universum sieht von allen Positionen im Raum zu einem bestimmten Zeitpunkt gleich aus und alle Richtungen im Raum an jedem Punkt sind gleichwertig.
Das Kosmologische Prinzip wird durch die homogene und isotrope Galaxienverteilung, doch vor allem durch die höchst isotrope $2{,}73\,\mathrm{K}$ kosmische Mikrowellen-Hintergrundstrahlung motiviert $\left[\text{COBE: } \Delta T < 1{,}3 \cdot 10^{-5} \cdot T\right]$.
{ Dabei gilt, dass das Universum nicht (räumlich) isotrop sein kann, wenn es nicht ebenfalls homogen ist. }
Es gibt auch Kosmologie-Modelle, die auf die Isotropieforderung verzichten und die heutige Isotropie auf dissipative Vorgänge zurückführen, sowie ein hierarchisches Modell („Clustering“ von Galaxien), allerdings benötigt man das viel stärkere Kosmologische Prinzip, um die Metrik zu bestimmen.
Dieses Prinzip gibt Rahmenbedingungen für die Metrik der Raum-Zeit und führt so zur Robertson-Walker-Metrik:

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - R^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-k\,r^2} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\phi^2\right)\right] = c^2\,\mathrm{d}t^2 - R^2(t)\left[\mathrm{d}\chi^2 + f^2(\chi)\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\phi^2\right)\right]$$

(sphärisch-symmetrisch), mit der Transformation: $r = f(\chi) = \begin{cases} \sin(\chi) & : k = 1 \\ \chi & : k = 0 \\ \sinh(\chi) & : k = -1 \end{cases}$.

Dabei sind (r', θ, ϕ) die Polarkoordinaten (vgl. “Koordinatensysteme”), $r = r' / \left(1 + \frac{1}{4}kr'^2\right)$ (einheitslos), $k \in \{1, 0, -1\}$ ist eine Konstante (Krümmungszahl), die drei verschiedene Arten von Raum-Metriken liefert, und $R(t) \equiv R$ ist der Skalierungsfaktor der Metrik (Krümmungsradius) der Dimension Länge, der nicht mit dem Krümmungsskalar verwechselt werden darf; wenn nicht extra erwähnt, wird im folgenden nur der Skalierungsfaktor verwendet. Freifallende Objekte wie Galaxien im Kosmos haben feste Koordinatenwerte.

Mit dieser Metrik lassen sich die nichtverschwindenden Komponenten (vgl. auch jeweilige Symmetrien) der folgenden Tensoren bzw. tensorähnlichen Größen (Γ) schreiben als :
$g_{00} = 1,\quad g_{11} = -R^2/\left(1-kr^2\right),\quad g_{22} = -r^2 R^2,\quad g_{33} = -r^2\sin^2(\theta) R^2,\quad g = R^6(t)\, r^4 \left(1-kr^2\right)^{-1}\sin^2(\theta),$
$g^{00} = 1,\quad g^{11} = -\left(1-kr^2\right)/R^2,\quad g^{22} = -(rR)^{-2},\quad g_{33} = -(r\sin(\theta)R)^{-2};$
$\Gamma^0_{11} = c^{-1} R\dot{R}/\left(1-kr^2\right),\quad \Gamma^0_{22} = c^{-1} r^2 R\dot{R},\quad \Gamma^0_{33} = c^{-1} r^2 \sin^2(\theta) R\dot{R},$
$\Gamma^1_{01} = c^{-1}\dot{R}/R,\quad \Gamma^1_{11} = kr/\left(1-kr^2\right),\quad \Gamma^1_{22} = -r\left(1-kr^2\right),\quad \Gamma^1_{33} = -r\left(1-kr^2\right)\sin^2(\theta),$
$\Gamma^2_{02} = c^{-1}\dot{R}/R,\quad \Gamma^2_{12} = 1/r,\quad \Gamma^2_{33} = -\sin(\theta)\cos(\theta),\quad \Gamma^3_{03} = c^{-1}\dot{R}/R,\quad \Gamma^3_{13} = 1/r,\quad \Gamma^3_{23} = \cot(\theta);$
$R_{00} = -3\ddot{R}/R,\quad R_{11} = \left(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2 k\right)/\left(1-kr^2\right),$
$R_{22} = r^2\left(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2 k\right),\quad R_{33} = r^2\sin^2(\theta)\left(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2 k\right);$
Krümmungsskalar: $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -6\left(R\ddot{R} + \dot{R}^2 + c^2 k\right)/R^2;$
mit $u_\mu = (1,0,0,0)$ folgt: $T_{00} = \varepsilon,\quad T_{11} = pR^2/\left(1-kr^2\right),\quad T_{22} = pr^2R^2,\quad T_{33} = pr^2\sin^2(\theta)R^2.$

Als linear unabhängige Gleichungen bleiben von den Einsteinschen Feldgleichungen nur die 00- und 11-Komponenten:
$3\left(\dot{R}^2 + c^2 k\right) = 8\pi G\varepsilon R^2/c^2 + c^2\Lambda R^2,\qquad 2R\ddot{R} + \dot{R}^2 + c^2 k = -8\pi G p R^2/c^2 + c^2\Lambda R^2.$
Im folgenden bekommen heutige Größen eine tiefgestellte 0, z.B. t_0: jetziger Zeitpunkt, $R_0 := R(t_0)$ etc. .

Die Expansionsgeschwindigkeit des Universums ist definiert durch: $H \equiv H(t) := \dfrac{\dot{R}(t)}{R(t)}$, der heutige Wert

wird Hubble Konstante $H_0 \in (45\ldots100)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ genannt.

Die kosmologische Dichte ist gegeben durch: $\rho_\Lambda := \dfrac{\Lambda c^2}{8\pi G}$, die kritische Dichte durch: $\rho_c = \dfrac{\varepsilon_c}{c^2} := \dfrac{3H^2}{8\pi G}$ und

die heutige kritische Dichte ist definiert durch: $\rho_{c,0} = \dfrac{\varepsilon_{c,0}}{c^2} := \dfrac{3{H_0}^2}{8\pi G} = 1.5 \cdot 10^{-29}\,\dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\left(\dfrac{H_0}{90\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}}\right)^2$.

Der Dichteparameter ist gegeben durch: $\Omega := \dfrac{\rho_m}{\rho_c}$, wobei $\rho_m = \dfrac{\varepsilon}{c^2}$ die mittlere Dichte darstellt, $\Omega_0 := \dfrac{\rho_{m,0}}{\rho_{c,0}}$.

Der kosmologische Term ist bestimmt durch: $\lambda := \dfrac{\Lambda c^2}{3H^2} = \dfrac{\rho_\Lambda}{\rho_c}$, $\qquad \lambda_0 := \dfrac{\Lambda c^2}{3{H_0}^2} = \dfrac{\rho_\Lambda}{\rho_{c,0}}$.

Der Verzögerungsparameter ist definiert durch: $q \equiv q(t) := -\dfrac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}$, $\qquad q_0 = \dfrac{-\ddot{R}(t_0)}{R_0\,{H_0}^2} = \dfrac{1}{2}\Omega_0 - \lambda_0$.

Der generalisierte Dichteparameter lautet: $\Omega_0^\Delta := \Omega_0 + \lambda_0 = \dfrac{\rho_{m,0}}{\rho_{c,0}} + \dfrac{\rho_\Lambda}{\rho_{c,0}} = \dfrac{8\pi G}{3{H_0}^2}\left(\rho_{m,0} + \rho_\Lambda\right)$.

Es galt: $3\left(\dot R^2+c^2k\right)=8\pi G\varepsilon R^2/c^2+c^2\Lambda R^2, \qquad 2R\ddot R+\dot R^2+c^2k=-8\pi GpR^2/c^2+c^2\Lambda R^2$

$$\overset{i)}{\Longrightarrow}\quad \varepsilon=\frac{3c^2}{8\pi G}\left[\left(\frac{\dot R}{R}\right)^2+\frac{c^2k}{R^2}-\frac{c^2\Lambda}{3}\right], \qquad \dot\varepsilon=\frac{3c^2}{8\pi G}\left[\frac{2\dot R\ddot R}{R^2}-\frac{2\dot R}{R^3}\left(\dot R^2+c^2k\right)\right],$$

$$\ddot R=\frac{-4\pi Gp}{c^2}R-\frac{\dot R^2}{2R}-\frac{c^2k}{2R}+\frac{c^2\Lambda R}{2}, \qquad p=\frac{-c^2}{8\pi G}\left[\underbrace{\left(\frac{\dot R}{R}\right)^2+2\frac{\ddot R}{R}}_{=H^2(1-2q)}+\frac{c^2k}{R^2}-c^2\Lambda\right]$$

$$\Longrightarrow\quad \dot\varepsilon+3(\varepsilon+p)\frac{\dot R}{R}=0 \quad \overset{(+\dot p;\cdot R^3)}{\Longrightarrow}\quad \dot pR^3=\dot\varepsilon R^3+\dot pR^3+3(\varepsilon+p)\dot RR^2=\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\left[(\varepsilon+p)R^3\right]$$

$$\overset{\left(\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}=\dot R\frac{\mathrm d}{\mathrm dR}\right)}{\Longrightarrow}\quad \frac{\dot pR^3}{\dot R}=\frac{\mathrm d}{\mathrm dR}\left[(\varepsilon+p)R^3\right] \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm d}{\mathrm dR}\left(\varepsilon R^3\right)=\frac{\dot pR^3}{\dot R}-\frac{\mathrm d}{\mathrm dR}\left(pR^3\right)=-3R^2p.$$

$\Longrightarrow$ Für $R\to\infty$ verschwindet εR^2 mindestens wie R^{-1}, da der Druck positiv ist $(p\geq 0)$.

$$\overset{ii)}{\Longrightarrow}\quad \boxed{\ddot R=\frac{-4\pi G}{3c^2}R(\varepsilon+3p)+\frac{c^2}{3}\Lambda R, \quad \dot R^2=\frac{8\pi G\varepsilon}{3c^2}R^2-c^2k+\frac{\Lambda c^2}{3}R^2 : \text{ Einstein-Friedmann-Gleichungen.}}$$

$$\overset{(\dot R=HR)}{\Longrightarrow}\quad c^2k=\frac{8\pi G\varepsilon+\Lambda c^4-3H^2c^2}{3c^2}R^2 \quad\overset{k\neq 0}{\Longrightarrow}\quad R_0=\frac{c}{H_0}\sqrt{\frac{k}{\frac{8\pi G\varepsilon_0}{3c^2H_0{}^2}+\frac{\Lambda c^2}{3H_0{}^2}-1}}=\frac{c}{H_0}\sqrt{\frac{k}{\Omega_0^\Delta-1}}.$$

Zu den Einstein-Friedmann-Gleichungen kommt noch die Zustandsgleichung $p=p(\varepsilon)$, damit das System (3 Unbekannte: R,ε,p; 3 Gleichungen) mit den Randbedingungen (H_0, q_0 bzw. Ω_0, $\rho_{m,0}$, siehe unten) lösbar ist.
Wichtig sind zwei Grenzfälle:

1) Inkohärente Materie (Staub): $p=0$,
2) Strahlungsdominanz: $p=\frac{1}{3}\varepsilon$.

Die drei Arten der Metrik des Raumes sind:

Sphärische Metrik:	$k=1$	$\Longleftrightarrow\ \Omega_0^\Delta>1$, speziell für $\Lambda=0$ gilt:	$\Longleftrightarrow\ \Omega_0>1$	$\Longleftrightarrow\ q_0>\frac{1}{2}$,
Euklidische Metrik:	$k=0$	$\Longleftrightarrow\ \Omega_0^\Delta=1$, speziell für $\Lambda=0$ gilt:	$\Longleftrightarrow\ \Omega_0=1$	$\Longleftrightarrow\ q_0=\frac{1}{2}$,
Hyperbolische Metrik:	$k=-1$	$\Longleftrightarrow\ \Omega_0^\Delta<1$, speziell für $\Lambda=0$ gilt:	$\Longleftrightarrow\ \Omega_0<1$	$\Longleftrightarrow\ q_0<\frac{1}{2}$.

Im folgenden sei immer t_i der Zeitpunkt der Emission, t_0 (heutiges Weltalter) der des Lichtempfangs.
Für die Lichtbahn (mit Lichttrajektorie $\chi(t)$, $\chi(t_i)=0$, $\chi(t_0)=\chi$, $\theta=konst.$, $\phi=konst.$) gilt:

$$\mathrm ds^2=c^2\,\mathrm dt^2-R^2(t)\,\mathrm d\chi^2=0 \qquad\Longrightarrow\qquad \mathrm d\chi=\frac{c\,\mathrm dt}{R(t)}.$$

Betrachtung zweier aufeinanderfolgender Wellenberge $\left(\lambda=\frac{c}{\nu},\ \delta t=\frac{1}{\nu}\text{ klein, }\sim 10^{-14}\text{ s für sichtbares Licht}\right)$:

$$\chi=\int_{t_i}^{t_0}\frac{c\,\mathrm dt}{R(t)}=\int_{t_i+\delta t_i}^{t_0+\delta t_0}\frac{c\,\mathrm dt}{R(t)} \quad\Longrightarrow\quad 0=\int_{t_0}^{t_0+\delta t_0}\frac{c\,\mathrm dt}{R(t)}-\int_{t_i}^{t_i+\delta t_i}\frac{c\,\mathrm dt}{R(t)}=\frac{c\,\delta t_0}{R(t_0)}-\frac{c\,\delta t_i}{R(t_i)}$$

$$\Longrightarrow\quad R(t)\,\nu(t)=konst. \quad\Longrightarrow\quad \lambda\propto R \text{ wie bei allen Längen.}$$

Die Rotverschiebung ist gegeben durch: $z:=\dfrac{\lambda_0-\lambda_i}{\lambda_i}=\dfrac{R_0}{R(t_i)}-1$, wobei λ_0 die gemessene (Doppler-verschobene) und λ_i die Laborwellenlänge (bei ruhender Quelle) ist.
Hubbles Gesetz (1929): $v=cz=H_0\,l$, mit l als Distanz zum Emitter, gilt nur für bestimmte z, denn ist z sehr klein, so kann die Eigenbewegung (zufällige Geschwindigkeit) einer Galaxie (bei Klumpigkeit der Galaxienverteilung entsprechend einem kleinen Galaxienhaufen ~ 200 km/s) in der Größenordnung der Fluchtgeschwindigkeit v liegen, für zu große z (nicht $z\ll 1$) ist der Zeitraum $t-t_0$ zu groß, d.h. man sieht eine systematische Geschwindigkeit v einer anderen Epoche $(H(t)\not\approx H_0)$.
In diesem Fall wird die folgende Reihe betrachtet: $z=H_0\,l/c+\frac{1}{2}(1+q_0)(H_0\,l/c)^2+O\left(H_0{}^3\,l^3\right)$.

Für das jeweilige Weltalter gilt: $t = \int_0^t \mathrm{d}t' = \int_0^R \dot{R}'^{-1} \mathrm{d}R'$ mit $R(0) = 0$, $R(t) = R$; gesucht: $\dot{R} = \dot{R}(R)$.

Der Punkt $t = 0$ ist eine Singularität ($R(0) = 0$, $\varepsilon(0) = \infty$, $T = \infty$, etc.) und wird als „Urknall" bezeichnet.
Aus den Einstein-Friedmann-Gleichungen und $c^2 k = H_0{}^2 \left(\Omega_0^\Delta - 1\right) R_0{}^2$ erhält man:

$$\dot{R}^2 = H^2 \left[\Omega R^2 + \lambda R^2 - \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \left(\Omega_0^\Delta - 1\right) R_0{}^2\right]$$

$$\Longrightarrow \quad t = \int_0^R \frac{\mathrm{d}R'}{H\sqrt{\Omega R'^2 + \lambda R'^2 - \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \left(\Omega_0^\Delta - 1\right) R_0{}^2}}$$

und ist zusätzlich eine Zustandsgleichung gegeben, kann man weiter vereinfachen. Gilt z.B. $p = 0$, so folgt $\varepsilon \propto R^{-3}$ und somit folgt das heutige Weltalter:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\Omega_0 x^{-1} + \lambda_0 x^2 - \left(\Omega_0^\Delta - 1\right)}} \qquad \text{mit } x = \frac{R}{R_0} = \frac{1}{1+z}.$$

Kosmologische Modelle:

i) Modell des stationären Zustands („steady state") $[k = 0,\ q = -1]$:
Beruht auf dem Perfekten Kosmologischen Prinzip, nach dem zusätzlich auch die Zeit isotrop ist (gleiche Homogenität zu allen Zeiten); verlangt bei Ausdehnung Materieerzeugung;

ii) Einsteins statisches Universum (1917):
$R(t) = R_0 \equiv konst.$, $\quad p = 0:$ $\qquad \varepsilon = c^4 \Lambda/(4\pi G)$, $\quad k = \Lambda R_0{}^2 \quad \Longrightarrow \Lambda > 0,\ k = 1$;

iii) Standardmodelle (oder Friedmann - Modelle) $[\Lambda = 0]$:
Hier gilt: $k = 1$: geschlossenes Weltall, endliches Volumen, $\quad k = 0; -1$: offenes Universum;
- Einstein - de Sitter - Modell $\left[k = 0,\ p = 0,\ R(t) = R_0 \left(\tfrac{3}{2} H_0 t\right)^{2/3},\ t_0 = \tfrac{2}{3} H_0{}^{-1}\right]$;

iv) Lemaitre - Modelle $\left[\Lambda \neq 0, \quad \dot{R} \not\equiv 0\right]$:
- de Sitter - Modell $[k = 0,\ \Lambda > 0]$:
  Expandierendes Modell, aufgestellt kurz nach Einsteins statischem Universum;
- Lemaitre - Modell (1927, 1931) $\left[k = 1,\ \Lambda > k/R_0{}^2\right]$:
  Während der Expansion wird bei kurzzeitigem Verlangsamen der Expansion („coasting period") Einsteins statisches Universum erreicht;
- Eddington (- Lemaitre) - Modell (1930) $[k = 1]$:
  Beginn wie bei Einsteins statischem Universum, dann aber nach Störung durch Galaxienbildung gleichförmige Expansion.

Probleme der Standardmodelle:

1) Horizont-Problem: Nicht mehr kausal verbundene Bereiche ($d > ct$) haben dieselbe Dichte, Temperatur, etc. (s. Hintergrundstrahlung);

2) Glätte-Problem: Die primordiale Materie muss sehr homogen gewesen sein, denn eine Dichteschwankung (kurz nach dem „Urknall") hätte wesentlich größere „Verklumpungen" als im Maßstab von Galaxien ergeben;

3) Flachheits-Problem: Der Dichteparameter würde für alle Zeiten eins bleiben ($\Omega = 1$), wenn er eins kurz nach dem „Urknall" gewesen wäre. Wäre er es nicht gewesen, so würde er sich mit der Zeit immer weiter von eins entfernen.
Der heutige Wert $\Omega \in (0, 1 \ldots 2)$ führt zu $|\Omega - 1|/\Omega \leq 10^{-15}$ ca. 1 s nach dem „Urknall". Zeitlich umgekehrte Argumentation: Kleine Krümmungen (etwa Fluktuationen um den Wert $\Omega = 1$) zu früher Zeit müssten heute zu großen Krümmungen geführt haben.
Das heutige Universum ist so gesehen zu flach !