Physik

Indexschreibweise in der Relativitätstheorie

Sei $B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ eine Menge dreier linearer, unabhängiger Vektoren aus E^3, d.h. B sei allgemeine, nicht notwendigerweise orthonormale Basis der E^3.
Man definiert: $g_{ik}=g_{ki}:=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k$ mit $\det(g_{ik})\neq 0$ (vgl. Gramsche Matrix).
Für ein beliebiges $\vec{x}\in E^3$ gilt: $\vec{x}=\sum\limits_{i=1}^{3}x^i\cdot\vec{e}_i\equiv x^i\cdot\vec{e}_i\equiv\vec{e}_i\cdot x^i$, wobei in den letzten Ausdrücken die Einsteinsche Summenkonvention verwendet wurde, bei der immer über gleiche gegenständige Indizes (oben - unten) summiert wird (Ricci-Kalkül). Es folgt: $\vec{x}\cdot\vec{y}=\left(x^i\cdot\vec{e}_i\right)\cdot\left(y^k\cdot\vec{e}_k\right)=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k\cdot x^i\cdot y^k=g_{ik}\cdot x^i\cdot y^k$.
Man sagt deshalb, dass die g_{ik} die Metrik bestimmen und nennt (g_{ik}) die metrische Matrix oder kurz Metrik.
Sei nun A eine Transformation der Basis B, $\vec{e}_i\longmapsto\vec{e}_i{}'=A\vec{e}_i=\vec{e}_l\cdot A^l{}_i$ mit $\det(A)\neq 0$, d.h. $A\in GL(3,\mathbb{R})$, so ist $\{\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\vec{e}_3{}'\}$ wieder eine Basis. Man beachte hierbei die Summation über den Zeilenindex, was dem Matrixprodukt mit der transponierten Matrix entspricht.
Es ergibt sich die passive Transformation der Vektorkoordinaten von festem $\vec{x}$:
$\vec{x}=x'^i\cdot\vec{e}_i{}'=x'^i\cdot A^l{}_i\cdot\vec{e}_l=x^l\cdot\vec{e}_l$; man nennt dies „kontravariante" Transformation relativ zur Basistransformation, da die Form der beiden Gleichungen $x^l=A^l{}_i\cdot x'^i$ und $\vec{e}_i{}'=A^l{}_i\cdot\vec{e}_l$ unterschiedlich ist.
Deshalb heißen die x^i kontravariante Komponenten von $\vec{x}$.
Für die aktive Transformation von Vektoren gilt: $\vec{x}\longmapsto\vec{x}'=A\,\vec{x}=x^i\cdot A\,\vec{e}_i=x^i\cdot\vec{e}_i{}'=A^l{}_i\cdot x^i\cdot\vec{e}_l=\tilde{x}^l\cdot\vec{e}_l$.
Sei $\{*\vec{e}^1,*\vec{e}^2,*\vec{e}^3\}$ die zu B reziproke (oder duale) Basis, d.h. es gilt: $*\vec{e}^i\cdot\vec{e}_k=\delta^i_k=\begin{cases}1 \text{ für } i=k\\ 0 \text{ für } i\neq k\end{cases}$.
Eine solche Basis kann man immer finden; physikalische Anwendung: Kristallographie.
Mit Hilfe der $*\vec{e}^i$ lassen sich die kontravarianten Komponenten leicht berechnen: $\vec{x}=x^l\cdot\vec{e}_l$, denn die skalare Multiplikation mit $*\vec{e}^i$ ergibt: $\vec{x}\cdot*\vec{e}^i=*\vec{e}^i\cdot\vec{x}=x^l\cdot*\vec{e}^i\cdot\vec{e}_l=x^i$.
$\vec{x}$ kann auch nach der dualen Basis entwickelt werden: $\vec{x}=*\vec{e}^i\cdot x_i$, wobei analog gilt: $x_i=\vec{e}_i\cdot\vec{x}$.
Für die passive Transformation der x_i ergibt sich: $x_i'=\vec{x}\cdot\vec{e}_i{}'=\vec{x}\cdot\vec{e}_l\cdot A^l{}_i=x_l\cdot A^l{}_i$; da dies die selbe Form hat wie $\vec{e}_i{}'=\vec{e}_l\cdot A^l{}_i$, nennt man die x_i die kovarianten Komponenten von $\vec{x}$.
Analog zu $g_{ik}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k$ definiert man: $g^{ik}\,(=g^{ki}):=*\vec{e}^i\cdot*\vec{e}^k$. Man findet folgende Zusammenhänge:
$\vec{e}_i=g_{ik}\cdot*\vec{e}^k$; $x_i=g_{ik}\cdot x^k$; $x^i=g^{ik}\cdot x_k$; $g_{ik}\cdot g^{kl}=\delta_i{}^l$; $\left(g^{kl}\right)=\left(g_{kl}\right)^{-1}$, somit gilt:
$\vec{x}\cdot\vec{y}=g_{ik}\cdot x^i\cdot y^k=x^i\cdot y_i=g^{ik}\cdot x_k\cdot y_i$; man beachte: $g^{ik}=g^{ki}$ und $g_{ik}=g_{ki}$.
l heißt Linearform, wenn gilt: $l:\ E^3\longrightarrow\mathbb{R}$ mit $\vec{x}\longmapsto l(\vec{x})\in\mathbb{R}$ und $l(\lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{y})=\lambda\cdot l(\vec{x})+\mu\cdot l(\vec{y})$.
Es ergibt sich die Komponentendarstellung: $l(\vec{x})=l\left(x^i\cdot\vec{e}_i\right)=x^i\cdot l(\vec{e}_i)=:x^i\cdot l_i$ und es gilt:
$l_i':=l(\vec{e}_i{}')=A^k{}_i\cdot l_k$, deshalb heißen die $l_i=l(\vec{e}_i)$ die kovarianten Komponenten von l, wobei l_1,l_2,l_3 die Linearform in E^3 eindeutig festlegt.
Nach dem Satz von Riesz kann jede Linearform als Vektorprodukt eines festen Vektors aufgefasst werden, d.h. $l(\vec{x})=\vec{l}\cdot\vec{x}=\left(*\vec{e}^i\cdot\vec{x}\right)\cdot l_i=x^i\cdot l_i$; $\vec{l}$ ist dabei Normale auf den Flächen $l(\vec{x})=const.$.
Im euklidischen Raum sind Linearformen und Vektoren äquivalent.
t heißt Bilinearform oder Tensor (2. Stufe), wenn gilt: $t:\ E^3\times E^3\longrightarrow\mathbb{R}$, $(\vec{x},\vec{y})\longmapsto t(\vec{x},\vec{y})\in\mathbb{R}$, wobei t sowohl bezüglich $\vec{x}$ als auch bezüglich $\vec{y}$ linear ist.
Es ergibt sich die Komponentendarstellung: $t(\vec{x},\vec{y})=t\left(x^i\cdot\vec{e}_i,y^k\cdot\vec{e}_k\right)=x^i\cdot y^k\cdot t(\vec{e}_i,\vec{e}_k)=:x^i\cdot y^k\cdot t_{ik}$, wobei man die t_{ik} kovariante Komponenten des Tensors t bezüglich der Basis B nennt.
Tensoren transformieren sich wie folgt: $t_{ik}':=t(\vec{e}_i{}',\vec{e}_k{}')=t_{lm}\cdot A^l{}_i\cdot A^m{}_k$, die Tensorkomponenten transformieren also mit dem Produkt der Transformationsmatrix. In der Physik wird ein Tensor durch die t_{ik} und obiges Transformationsverhalten definiert. Diese Definition ist sinnvoll, denn $t_{ik}'\cdot x'^i\cdot y'^k=t_{ik}\cdot x^i\cdot y^k$.
$t^{ik}:=t\left(*\vec{e}^i,*\vec{e}^k\right)$ heißen kontravariante Komponenten, $t^i{}_k:=t\left(*\vec{e}^i,\vec{e}_k\right)$ und $t_i{}^k:=t\left(\vec{e}_i,*\vec{e}^k\right)$ heißen gemischte Komponenten des Tensors t. Das „Herauf-" und „Herunterziehen" von Indizes gestaltet sich sehr einfach, da der Formalismus praktisch von selbst rechnet, z.B.: $t_{ik}=g_{il}\cdot t^l{}_k=g_{il}\cdot g_{km}\cdot t^{lm}$; $t^i{}_k=g^{il}\cdot t_{lk}$; etc. .
Mit zwei Linearformen a und b kann man einen Tensor definieren: $t(\vec{x},\vec{y}):=a(\vec{x})\cdot b(\vec{y})$ mit den Komponenten $t_{ik}=a(\vec{e}_i)\cdot b(\vec{e}_k)=a_i\cdot b_k$; man schreibt auch $t=a\otimes b\ \ (\neq b\otimes a)$ oder $\vec{a}\otimes\vec{b}$.
Der „Eins"-Tensor $\mathbb{I}$ wird durch $\mathbb{I}(\vec{x},\vec{y}):=\vec{x}\cdot\vec{y}$ definiert.
Er hat die Komponenten: $\mathbb{I}^i{}_k=*\vec{e}^i\cdot\vec{e}_k=\delta^i{}_k$, $\mathbb{I}_{ik}=g_{ik}$, $\mathbb{I}^{ik}=g^{ik}$.
Man nennt $\vec{f}$ eine lineare Vektorfunktion, wenn $\vec{f}:\ E^3\longrightarrow E^3$, $\vec{x}\longmapsto\vec{f}(\vec{x})\in E^3$ mit $\vec{f}(\lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{y})=\lambda\cdot\vec{f}(\vec{x})+\mu\cdot\vec{f}(\vec{y})$.
Komponentendarstellung einer linearen Vektorfunktion: $\vec{f}(\vec{x})=\vec{f}\left(x^k\cdot\vec{e}_k\right)=x^k\cdot\vec{f}(\vec{e}_k)=\vec{f}_k\cdot x^k$;
kovariante Komponenten von $\vec{f}$: $f_i(\vec{x})=\vec{e}_i\cdot\vec{f}(\vec{x})=\vec{e}_i\cdot\vec{f}_k\cdot x^k=:f_{ik}\cdot x^k$.
Die Matrix (f_{ik}) legt $\vec{f}$ in Bezug auf die Basis B fest.
f_{ik} kann als Matrix einer Bilinearform $\equiv$ eines Tensors aufgefasst werden:
$t(\vec{y},\vec{x}):=\vec{y}\cdot f(\vec{x})=\vec{y}\cdot\vec{f}_k\cdot x^k=\vec{e}_i\cdot\vec{f}_k\cdot y^i\cdot x^k=f_{ik}\cdot x^k\cdot y^i$, also gilt $t_{ik}=f_{ik}$.

Die Spur eines Tensors $\operatorname{tr}(t) = t^i{}_i = \sum_i t\left(*\vec{e}^{\,i}, \vec{e}_i\right)$ ist basisunabhängig, da
$t'^i{}_i = t\left(*\vec{e}^{\,\prime i}, \vec{e}_i{}'\right) = t\left(*\vec{e}^{\,\prime i}, \vec{e}_l\right) \cdot A^l{}_i = t\left(A^l{}_i \cdot *\vec{e}^{\,\prime i}, \vec{e}_l\right) = t\left(*\vec{e}^{\,l}, \vec{e}_l\right) = t^l{}_l$.
Der Prozess „Gleichsetzen eines kontravarianten (= obigen) mit einem kovarianten (= unteren) Index und Summation" heißt Kontraktion oder Verjüngung. „Die Zahl $\operatorname{tr}(t)$ ist jünger als der Tensor $t^i{}_k$!".
Man nennt einen Tensor symmetrisch, wenn $t(\vec{x},\vec{y}) = t(\vec{y},\vec{x})$ gilt; dann folgt für die Komponenten: $t_{ik} = t_{ki}$, $t^i{}_k = t_k{}^i$ und $t^{ik} = t^{ki}$.
Man nennt einen Tensor antisymmetrisch, wenn $t(\vec{x},\vec{y}) = -t(\vec{y},\vec{x})$ gilt; dann folgt für die Komponenten: $t_{ik} = -t_{ki}$, $t^i{}_k = -t_k{}^i$ und $t^{ik} = -t^{ki}$.
Durch $t_S(\vec{x},\vec{y}) := \frac{1}{2}\cdot(t(\vec{x},\vec{y}) + t(\vec{y},\vec{x}))$ und $t_A(\vec{x},\vec{y}) := \frac{1}{2}\cdot(t(\vec{x},\vec{y}) - t(\vec{y},\vec{x}))$ wird ein beliebiger Tensor t symmetrisiert bzw. antisymmetrisiert. Diese Prozesse sind unabhängig von der Basis!
Es gilt: $\operatorname{tr}(t_A) = 0$ und $\operatorname{tr}(t_S) = \operatorname{tr}(t)$, d.h. $t_{\hat{S}} := t_S - \frac{1}{3}\cdot \operatorname{tr}(t)\cdot \mathbb{1}$ erfüllt $\operatorname{tr}(t_{\hat{S}}) = 0$.

Man kann also jeden Tensor in irreduzible Bestandteile zerlegen: $t = t_{\hat{S}} + t_A + \frac{1}{3}\cdot \operatorname{tr}(t)\cdot \mathbb{1}$.

Die Trilinearform $t(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ definiert einen Tensor 3. Stufe mit den Komponenten: t_{ikl}, $t^i{}_{kl}$, $t^{ik}{}_l$, t^{ikl}, $t_k{}^i{}_l$, etc. .
Im dreidimensionalen Raum spielt der total antisymmetrische Tensor 3. Stufe, der Levi-Cività oder ε-Tensor, eine wichtige Rolle: $\varepsilon_{ikl} := \begin{cases} 0: \text{mindestens 2 Indizes sind gleich} \\ 1: (ikl) \text{ ist eine gerade Permutation von } (1,2,3) \\ -1: (ikl) \text{ ist eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \end{cases}$.
Verhalten des ε-Tensors bei Transformationen: $\varepsilon'_{ikl} = \varepsilon_{jmn}\cdot A^j{}_i \cdot A^m{}_k \cdot A^n{}_l = \det(A)\cdot \varepsilon_{ikl}$ mit $\det(A) = \varepsilon_{jmn}\cdot A^j{}_1 \cdot A^m{}_2 \cdot A^n{}_3$. Der ε-Tensor ist also invariant unter Elementen aus $SL(3,\mathbb{R})$.
Höhere Tensoren werden durch triviale Verallgemeinerung definiert, z.B.: $t(\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{u},\vec{w})$ mit t_{iklmn}, etc. .
Sämtliche Definitionen sind auf einen $n-$dimensionalen Raum E^n übertragbar;
allerdings ist der ε-Tensor im E^n von der $n-$ten Stufe: $\varepsilon_{k_1 k_2 \ldots k_n}$.
Multiplikation von Tensoren: Sei t ein Tensor dritter Stufe, s ein Tensor zweiter Stufe, dann wird $t\otimes s$ definiert durch: $(t\times s)(\vec{x},\vec{y},\vec{z},\vec{u},\vec{w}) := t(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\cdot s(\vec{u},\vec{w})$; das Tensorprodukt ist von 5. Stufe.
Kontraktion oder Verjüngung: Durch $t_{ikl}\cdot s^l{}_n =: u_{ikn}$ wird ein Tensor 3. Stufe definiert.
$\varepsilon_{ikl}\cdot\varepsilon^{jml} = \delta_i{}^j \cdot \delta_k{}^m - \delta_i{}^m\cdot\delta_k{}^j$; $\varepsilon_{ikl}\cdot\varepsilon^{jkl} = 2\cdot\delta_i{}^j$; $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ikl}\cdot a^k\cdot b^l$.

Die spezielle Relativitätstheorie

In der speziellen Relativitätstheorie werden Raum und Zeit zu 4 Dimensionen zusammengefasst, dem Minkowski-Raum. Bei ausgezeichnetem Ursprung kann jedem „Raum-Zeit-Punkt" (oder Ereignis oder Weltpunkt) ein Vierer Vektor zugeordnet werden:

$$x = \begin{pmatrix} c\cdot t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \text{ Nun gilt die Metrik: } g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ wobei manchmal}$$

auch eine andere Metrik benutzt wird, z.B. das $(-1)-$fache bzw. die 1 mit anderem Vorzeichen rechts unten.
Diese Metrik heißt indefinite oder pseudo-euklidische Metrik.
Es gilt also: $x\cdot y = x^\mu\cdot y_\mu = g_{\mu\nu}\cdot x^\mu\cdot y^\nu = x^0\cdot y^0 - \vec{x}\cdot\vec{y}$. Klassifikation der Vektoren:
$x^2 > 0$: zeitartig mit $x^0 > 0$ Zukunft und $x^0 < 0$ Vergangenheit; $x^2 = 0$: lichtartig; $x^2 < 0$: raumartig.

$$\text{Mit: } \beta := \frac{v}{c} \text{ und } \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ lautet die spezielle Lorentz-Transformation: } \Lambda := \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. $x^{0\prime} = \gamma\cdot\left(x^0 - \beta\cdot x^1\right)$ und $x^{1\prime} = \gamma\cdot\left(x^1 - \beta\cdot x^0\right)$.
Alle Lorentz- $(\mathcal{L}-)$ Transformationen lassen die Metrik $(g_{\mu\nu})$ und die Lichtgeschwindigkeit c invariant;
$\mathcal{L}-$ Gruppe $:= \{\Lambda : {}^t\Lambda(g_{\mu\nu})\Lambda = (g_{\mu\nu})\}$.

Mit $\partial_\mu := \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\partial^\mu := \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$ bzw. $\partial_0 = \dfrac{\partial}{\partial x^0} = \dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{\partial}{\partial t}$, dem 4-er Strom j^μ, dem 4-er Potential A^μ und dem elektromagnetischen Feldtensor $F^{\mu\nu}$ bzw. dem dualen Feldtensor $F^{D,\mu\nu}$ (vgl. „Gegenüberstellung: MKSA- und Gauß-CGS-System") ergeben sich die folgenden wichtigen Gleichungen im Gauß-CGS-System:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\cdot\pi}{c}\cdot j^\nu; \quad \partial_\mu j^\mu = 0; \quad \partial_\mu F^{D,\mu\nu} = 0; \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu; \quad \partial_\mu A^\mu = 0; \quad \Box A^\nu = \frac{4\cdot\pi}{c}\cdot j^\nu;$$

$$A^\mu(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\cdot\int\frac{j^\mu\left(\vec{x}\,',t'_{ret}\right)}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\,d^3x' \quad \text{mit} \quad t'_{ret} = t - \frac{1}{c}\cdot\left|\vec{x}-\vec{x}\,'\right|, \text{ der retardierten Zeit.}$$

Allgemeine Relativitätstheorie

Die Allgemeine Relativitätstheorie wird im 4-dimensionalen Riemannschen Raum formuliert, in dem jeder Punkt mit generalisierten Koordinaten $\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ bzw. x^μ mit $\mu \in \{0,1,2,3\}$ bezeichnet wird, einer zeitartigen und 3 raumartigen Koordinaten.
Wie bei der Speziellen Relativitätstheorie wird über gleiche, gegenständige Indices nach der Einsteinschen Summenkonvention summiert, allerdings ist die Metrik $g_{\mu\nu}$ nicht notwendig die Metrik des Minkowski Raumes: $ds^2 = \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2$ (manchmal wird statt der gebräuchlicheren Signatur $(+---)$ auch $(-+++)$ verwendet, vgl. „Indexschreibweise in der Relativitätstheorie“), sondern in der Regel ortsabhängig. Nach dem Relativitätsprinzip lassen sich aber für jeden (aber dann festen) Punkt Koordinaten finden, für die die Christoffel-Symbole (s. u.) und damit alle partiellen Ableitungen des metrischen Tensors verschwinden, da man ein gravisches Feld „wegtransformieren“ kann. An diesem Punkt kann dann durch eine weitere lineare Koordinatentransformation die Metrik zu der des flachen Raumes (Minkowski Metrik) reduziert werden $\left[\text{mit } x^0 = ct,\ \left(x^1, x^2, x^3\right) \text{ sind die Cartesischen Koordinaten}\right]$.
Das von Einstein 1907 postulierte Relativitätsprinzip lautet in drei äquivalenten Formulierungen:
Schwere m_s und träge Masse m_i sind gleich $\left[m_i \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -m_s \nabla\phi(\vec{x}) \text{ mit } \phi(\vec{x}) = -G \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, d^3x'\right]$;
Gravitationskräfte sind äquivalent zu Beschleunigungskräften;
Im lokalen Inertialsystem (Satellitenlabor) gelten die bekannten Gesetze der Speziellen Relativitätstheorie <u>ohne</u> Gravitation.
Bei Koordinatentransformationen von x^μ zu x'^μ transformieren sich kontravariante Vektorfelder A^μ und kovariante Vektorfelder B_μ wie folgt:

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu, \quad B'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} B_\nu,$$

und analog Tensoren beliebiger Stufe. Alle Informationen des gravischen Feldes enthält der symmetrische $(g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu})$ kovariante Tensor 2. Stufe $g_{\mu\nu}$, auch metrischer Tensor oder Metrik genannt, da für das Raum-Zeit-Intervall ds^2 gilt: $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$.
Der zum metrischen Tensor kontravariante Tensor ist sein Inverses: $g_{\mu\nu}\, g^{\nu\lambda} = \delta^\lambda_\nu$.
Mit $g_{\mu\nu}$ bzw. $g^{\mu\nu}$ können Indizes herunter- bzw. heraufgezogen werden:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu, \quad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \text{ analog für Tensoren.}$$

Unter der Annahme einer negativen Determinante des metrischen Tensors definiere man:
$g = -\det(g_{\mu\nu}) = -\varepsilon^{\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3}\, g_{0\mu_0}\, g_{1\mu_1}\, g_{2\mu_2}\, g_{3\mu_3} > 0$, wobei ε das Levi-Civitá-Symbol (ein Tensor 4. Stufe) ist, definiert durch:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} := \begin{cases} 1 & \text{falls } (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \text{ eine gerade Permutation von (0,1,2,3) ist,} \\ -1 & \text{falls } (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \text{ eine ungerade Permutation von (0,1,2,3) ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die partielle (kovariante) Ableitung ist z.B. für ein Vektorfeld A_μ definiert durch:

$$\partial_\nu A_\mu \equiv A_{\mu,\nu} \equiv A_{\mu|\nu} := \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}.$$

Das Christoffel - Symbol $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ ist definiert durch:

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}\left(g_{\sigma\nu,\lambda} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma}\right), \text{ und es gilt: } \Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \Gamma^\mu_{\lambda\nu}, \quad \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = [\ln(\sqrt{g})]_{,\mu};$$

$$\text{Transformationsverhalten: } \Gamma'^\mu_{\nu\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\lambda} \Gamma^\rho_{\sigma\tau} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\nu\, \partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma}, \quad \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \text{ ist also kein Tensor.}$$

Durch die folgenden Gleichungen wird die kovariante Ableitung definiert (S ist Skalar):

$$\begin{aligned} A_{\mu;\nu} \equiv A_{\mu||\nu} &:= \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda, & A_{\mu\nu;\sigma} \equiv A_{\mu\nu||\sigma} &:= \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} A_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} A_{\mu\lambda}, \\ A^\mu{}_{;\nu} \equiv A^\mu{}_{||\nu} &:= \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda, & A^{\mu\nu}{}_{;\sigma} \equiv A^{\mu\nu}{}_{||\sigma} &:= \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} A^{\lambda\nu} + \Gamma^\nu_{\sigma\lambda} A^{\mu\lambda}, \\ S_{;\mu} \equiv S_{||\mu} &:= \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \equiv S_{,\mu} \equiv S_{|\mu}, & A^\mu{}_{\nu;\sigma} \equiv A^\mu{}_{\nu||\sigma} &:= \frac{\partial A^\mu{}_\nu}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} A^\lambda{}_\nu - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} A^\mu{}_\lambda; \end{aligned}$$

analoge Gleichungen gelten für andere Tensoren höherer Stufen als 2.
Die kovariante Ableitung des metrischen Tensors (und seines inversen Tensors) verschwinden, es gilt also:

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0, \quad g^{\mu\nu}{}_{;\lambda} = 0, \quad g_{\sigma\mu} A^\mu{}_{;\nu} = A_{\sigma;\nu}, \quad g^{\sigma\mu} A_{\mu;\nu} = A^\sigma{}_{;\nu}, \quad \text{etc.}$$

Die Vierergeschwindigkeit von Materie ist gegeben durch: $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$, wobei $\tau = \frac{s}{c}$ die Eigenzeit entlang der Weltlinie $x^\mu(s)$ ist.

Die Bewegung eines Teilchens im Gravitationsfeld ist gegeben durch: $\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0.$

Mit der Massen-Energie-Dichte ε und dem Druck p kann man nun den Energie-Impuls-Tensor einer perfekten Flüssigkeit definieren: $T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)\, u^\mu u^\nu - p\, g^{\mu\nu}$, mit $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$,
für den die Kontinuitätsgleichung (Erhaltung von Massen-Energie und Impuls) gilt: $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$.

A_ν sei der kovariante Vektor (oder 0-Form oder Koordinatenfunktion) des elektromagnetischen Potentials A (1-Form): $A = \sum_\nu A_\nu\, dx^\nu$, $\quad A_\nu := A(\partial_\nu)$ und $F := dA = \sum_\nu dA_\nu \wedge dx^\nu = \sum_\nu \sum_\mu \partial_\mu A_\nu\, dx^\mu \wedge dx^\nu$,

d.h. $F = \sum_{\mu<\nu} F_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$ (2-Form) mit $F_{\mu\nu} = F(\partial_\mu, \partial_\nu) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu \equiv A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$,

da $dx^\mu(\partial_\nu) = \partial_\nu x^\mu = \delta^\mu_\nu$, und $F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}$, d.h. $F_{0i} = E^i$, $F_{ik} = \sum_l \varepsilon_{ikl} B^l$

und $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, heißt der kovariante elektromagnetische Feldstärkentensor oder Faradaytensor.
Mit der Komplexeigenschaft der Cartanschen (oder äußeren) Ableitung $d \circ d = 0$ folgt $dF = ddA = 0$,

andererseits aber auch: $\quad dF = \sum_\lambda \sum_{\mu<\nu} \partial_\lambda F_{\mu\nu}\, dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \quad \Longrightarrow \quad$ homogene Maxwellsche Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&1)\ dF(\partial_1,\partial_2,\partial_3) = \partial_1 B^1 - \partial_1\left(-B^1\right) + \partial_2 B^2 - \partial_2\left(-B^2\right) + \partial_3 B^3 - \partial_3\left(-B^3\right) = 0 \\
&\qquad \Longrightarrow \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0; \\
&2)\ \left.\begin{aligned}
dF(\partial_0,\partial_2,\partial_3) &= \partial_0 B^1 - \partial_0\left(-B^1\right) + \partial_3 E^2 - \partial_3\left(-E^2\right) + \partial_2\left(-E^3\right) - \partial_2 E^3 = 0 \\
dF(\partial_0,\partial_3,\partial_1) &= \partial_0 B^2 - \partial_0\left(-B^2\right) + \partial_1 E^3 - \partial_1\left(-E^3\right) + \partial_3\left(-E^1\right) - \partial_3 E^1 = 0 \\
dF(\partial_0,\partial_1,\partial_2) &= \partial_0 B^3 - \partial_0\left(-B^3\right) + \partial_2 E^1 - \partial_2\left(-E^1\right) + \partial_1\left(-E^2\right) - \partial_1 E^2 = 0
\end{aligned}\right\} \\
&\qquad \Longrightarrow \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad \left(E^i = -\vec{E},\, B^i = \vec{B}\right).
\end{aligned}$$

Die Maxwellschen Gleichungen werden beschrieben durch: $\quad dF = 0 \quad$ und $\quad d * F = j$,
mit j als Viererstromdichte, und $\quad dj = 0 \quad$ entspricht der Kontinuitätsgleichung.

$R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda}$ ist der durch $R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda} := \Gamma^\sigma_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^\sigma_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} - \Gamma^\sigma_{\alpha\lambda}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ definierte Riemannsche Tensor,
der Krümmungstensor genannt wird, da er genau dann verschwindet, wenn der Raum nicht gekrümmt ist.
Für jeden kovarianten Vektor A_μ gilt: $\quad A_{\mu;\nu;\lambda} - A_{\mu;\lambda;\nu} = A_\sigma R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda}$.
Außerdem gilt: $R_{\mu\sigma\nu\lambda} = -R_{\sigma\mu\nu\lambda} = R_{\sigma\mu\lambda\nu}$, $\quad R_{\sigma\mu\nu\lambda} = R_{\nu\lambda\sigma\mu}$, $\quad R_{\sigma\mu\nu\lambda} + R_{\sigma\lambda\mu\nu} + R_{\sigma\nu\lambda\mu} = 0$
und die Bianchi-Identität: $\quad R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda;\rho} + R^\sigma{}_{\mu\rho\nu;\lambda} + R^\sigma{}_{\mu\lambda\rho;\nu} = 0$.
Durch Kontraktion des Krümmungstensors erhält man den Ricci-Tensor: $\quad R_{\mu\nu} := g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\sigma\nu} = R^\sigma{}_{\mu\sigma\nu}$, d.h.

es gilt: $R_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\sqrt{g}\right]_{,\lambda} - \left[\ln(\sqrt{g})\right]_{,\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}$, $\quad R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$.

Krümmungstensor und Ricci-Tensor werden von manchen Autoren auch mit umgekehrtem Vorzeichen definiert.
Durch erneute Kontraktion erhält man aus dem Ricci-Tensor den Krümmungsskalar: $\quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\nu{}_\nu$.
Der Einstein-Tensor $G^{\mu\nu}$ ist definiert durch: $\quad G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$.
Aus der Bianchi-Identität folgt: $\quad R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda;\rho} - R^\sigma{}_{\mu\nu\rho;\lambda} - R^\sigma{}_{\mu\rho\lambda;\nu} = 0$.
Mit Kontraktion $(\sigma = \nu)$ folgt: $\quad R_{\mu\lambda;\rho} - R_{\mu\rho;\lambda} - R^\sigma{}_{\mu\rho\lambda;\sigma} = 0$.
Anwendung von $g^{\lambda\mu}$ ergibt $\left(\text{wegen } R^{\sigma\lambda}{}_{\rho\lambda;\sigma} = R^{\lambda\sigma}{}_{\lambda\rho;\sigma}\right)$: $\quad R_{;\rho} - 2R^\lambda{}_{\rho;\lambda} = 0 \Longrightarrow g^{\mu\rho} R_{;\rho} - 2R^{\lambda\mu}{}_{;\lambda} = 0$.
Daraus folgt schließlich: $\quad G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right]_{;\nu} = 0$.

Die Einsteinschen Feldgleichungen (des Standardmodells) lauten: $\quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ (1915).

G ist dabei die Newtonsche Gravitationskonstante; mit der kosmologischen Konstante Λ
(mit Dimension einer reziproken Fläche) erhält man die (ursprünglichen und allgemeineren) Einsteinschen

Feldgleichungen: $\quad \boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}$, wobei ein positives Λ zu einer repulsiven Kraft,

ein negatives Λ zu einer attraktiven Kraft führt (zusätzlich zur attraktiven Gravitationskraft).
Zum genaueren Verständnis der Feldgleichungen betrachte die Zusammenfassung zur „Kosmologie“.